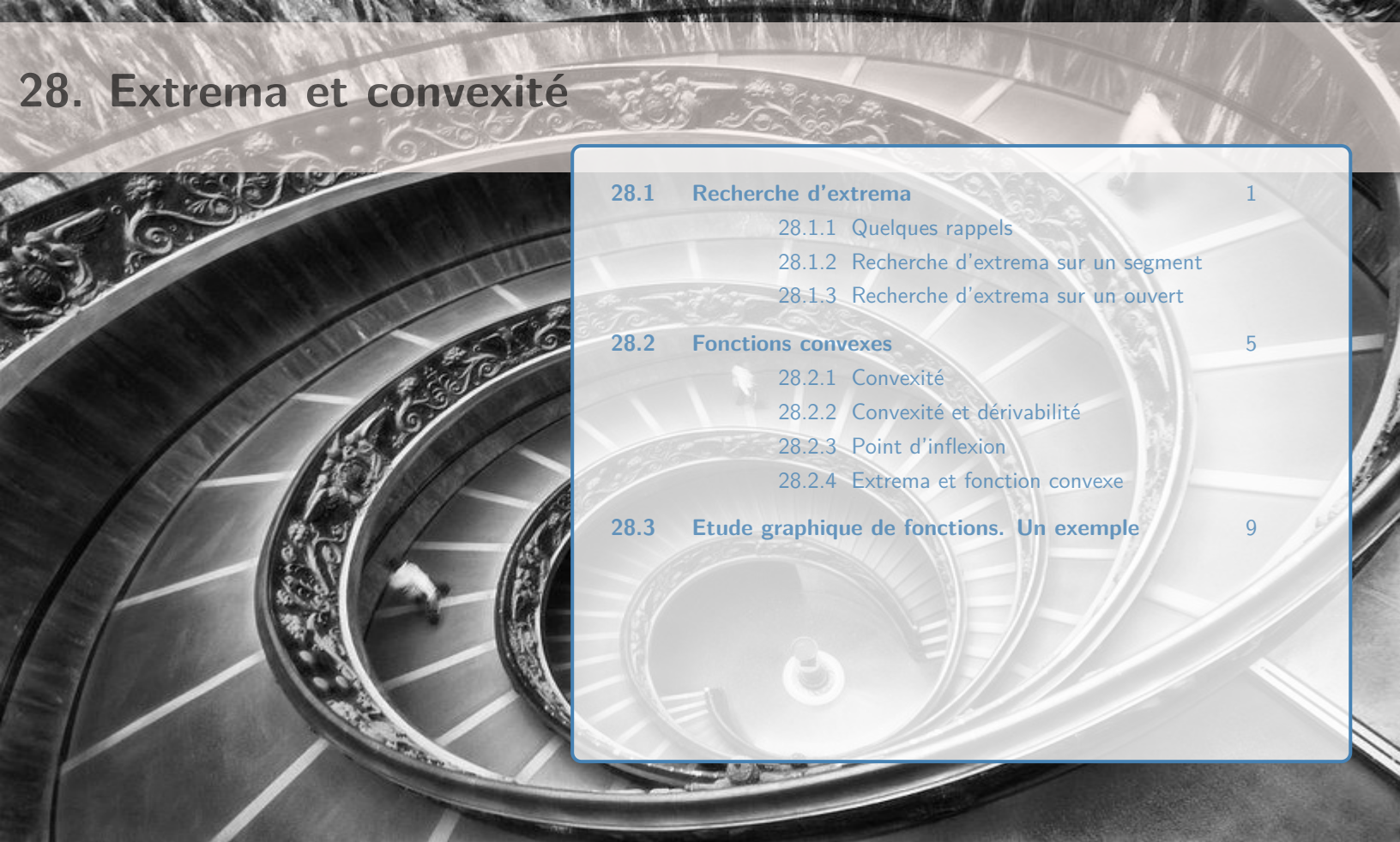




# 28. Extrema et convexité

|        |                                          |   |
|--------|------------------------------------------|---|
| 28.1   | Recherche d'extrema                      | 1 |
| 28.1.1 | Quelques rappels                         |   |
| 28.1.2 | Recherche d'extrema sur un segment       |   |
| 28.1.3 | Recherche d'extrema sur un ouvert        |   |
| 28.2   | Fonctions convexes                       | 5 |
| 28.2.1 | Convexité                                |   |
| 28.2.2 | Convexité et dérivabilité                |   |
| 28.2.3 | Point d'inflexion                        |   |
| 28.2.4 | Extrema et fonction convexe              |   |
| 28.3   | Etude graphique de fonctions. Un exemple | 9 |

Quel que soit le temps passé à faire des mathématiques, ce n'est jamais du temps perdu.

Cédric Villani

*Dans ce chapitre, nous allons revenir sur la notion d'extrema en la reliant aux dérivées premières et secondes d'une fonction lorsque celles-ci existent. Nous parlerons également de convexité, une autre notion étroitement liée à la dérivée seconde d'une fonction. Nous verrons également une condition suffisante de minimum global pour les fonctions convexes.*

## 28.1 Recherche d'extrema

### 28.1.1 Quelques rappels

**Définition 28.1 (Extremum local)** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble  $E$  et  $x_0 \in E$ .

- On dit que  $f$  admet un maximum local en  $x_0$  lorsqu'il existe un voisinage  $V_{x_0}$  de  $x_0$  inclus dans  $E$  tel que : pour tout  $x \in V_{x_0}$ ,  $f(x) \leq f(x_0)$ .
- On dit que  $f$  admet un minimum local en  $x_0$  lorsqu'il existe un voisinage  $V_{x_0}$  de  $x_0$ ,  $V_{x_0}$  inclus dans  $E$ , tel que : pour tout  $x \in V_{x_0}$ ,  $f(x) \geq f(x_0)$ .

**Définition 28.2 (Extremum global)** Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble  $E$  et  $x_0 \in E$ .

- On dit que  $f$  admet un maximum global en  $x_0$  lorsque pour tout  $x \in E$ ,

$$f(x) \leq f(x_0).$$

- On dit que  $f$  admet un minimum global en  $x_0$  lorsque pour tout  $x \in E$ ,

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Illustration

### 28.1.2 Recherche d'extrema sur un segment

**Théorème 28.1 (Théorème des bornes, rappel)** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Toute fonction continue sur le segment  $I = [a, b]$  est bornée et atteint ses bornes.



Remarque :

- Cela signifie que toute fonction continue sur le segment  $I = [a, b]$  admet des extrema globaux sur ce segment.
- Ce théorème donne l'existence d'extrema, mais ne donne pas de méthode pour les déterminer.

### 28.1.3 Recherche d'extrema sur un ouvert

**Théorème 28.2 (Caractérisation d'un extremum, rappel)** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et soit  $J = ]a, b[$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $J$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $x_0 \in J$  alors  $f'(x_0) = 0$ .



**Attention !** Ce résultat est faux si on ne suppose pas que l'intervalle est ouvert.

Par exemple, considérons la fonction  $f : x \mapsto x^2$  définie sur  $[0, 1]$ . Elle admet un maximum en 1, est dérivable sur  $[0, 1]$  mais  $f'(1) = 2 \neq 0$ .

**Attention !** Il est possible d'avoir  $f'(x_0) = 0$  sans que  $f$  n'admette d'extremum en  $x_0$ . Par exemple, considérons la fonction  $f : x \mapsto x^3$  définie sur  $[-1, 1]$ . Elle est dérivable sur  $[-1, 1]$ , de plus  $f'(0) = 0$ , mais 0 n'est ni un maximum local, ni un minimum local.



**Définition 28.3 (Point critique)** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle ouvert  $J$ . On dit que  $x_0 \in J$  est un point critique de  $f$  lorsque  $f'(x_0) = 0$ .

Remarque :



- On a donc montré que les extrema locaux d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle ouvert sont à chercher parmi ses points critiques.
- Les extrema locaux d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , sur un intervalle quelconque, sont donc à chercher parmi :
  - ses points critiques,
  - les bornes de l'intervalle.

**Théorème 28.3** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle ouvert  $I$  et soit  $x_0 \in I$  un point critique de  $f$ . Alors,

- Si  $f^{(2)}(x_0) > 0$ , alors  $f$  possède un minimum local en  $x_0$ .
- Si  $f^{(2)}(x_0) < 0$ , alors  $f$  possède un maximum local en  $x_0$ .
- Si  $f^{(2)}(x_0) = 0$ , on ne peut rien conclure.

*Démonstration.*

□

**Exercice 28.1** Trouver les extrema de la fonction  $f : x \mapsto x^3 - x^2 - x + 1$  définie sur  $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$ . Déterminer leur nature, et s'ils sont locaux ou globaux.

## 28.2 Fonctions convexes

### 28.2.1 Convexité

**Définition 28.4 (Fonction convexe, concave)** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  non vide et non réduit à un point.

- On dit que la fonction  $f$  est **convexe** sur  $I$  lorsque  $\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in [0, 1]$ ,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

- On dit que la fonction  $f$  est **concave** sur  $I$  lorsque  $\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in [0, 1]$ ,

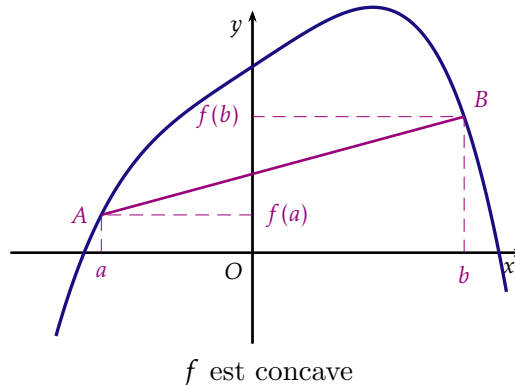
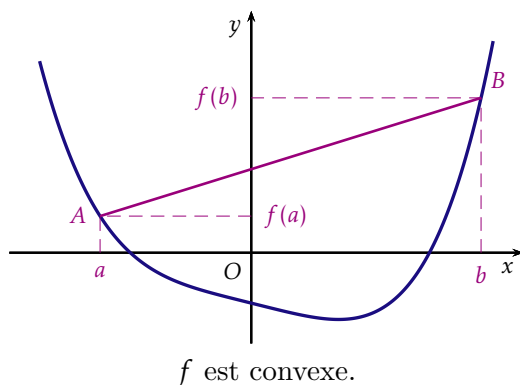
$$f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b).$$

#### Interprétation géométrique

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Pour  $t \in [0, 1]$ ,  $y = tf(a) + (1-t)f(b)$  parcourt le segment d'extrémités  $f(a)$  et  $f(b)$ , tandis que  $y = f(ta + (1-t)b)$  parcourt l'arc de courbe de  $f$  situé entre ces mêmes points. Ainsi :

- Dire que la fonction  $f$  est convexe sur  $I$  signifie que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située en dessous de chacune de ses cordes.
- Dire que la fonction  $f$  est concave sur  $I$  signifie que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de chacune de ses cordes.



**Exemple 28.1** La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 28.2** On admet que le logarithme est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Montrer que pour tout  $u \in [1, e]$ ,  $u - 1 \leq (e - 1)\ln(u)$ .

**Proposition 28.1** Une fonction  $f$  est concave sur  $I$ , si et seulement si,  $-f$  est convexe sur  $I$ .

**Théorème 28.4 (Généralisation de l'inégalité de convexité)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  non vide et non réduit à un point. Si  $f$  est convexe sur  $I$ , alors  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n, \forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$  tels que  $\sum_{k=1}^n t_k = 1$ ,

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k).$$

**Exemple 28.3** Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$ . Montrer que  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$ ,

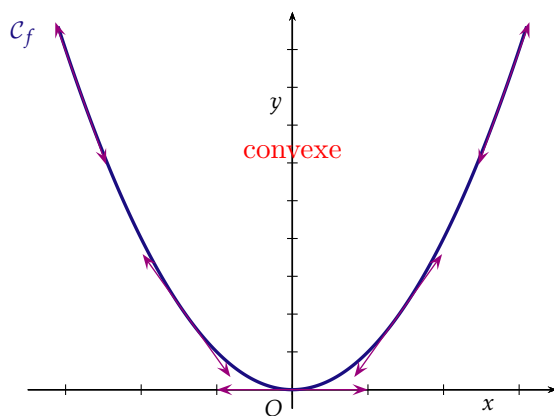
$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

## 28.2.2 Convexité et dérivabilité

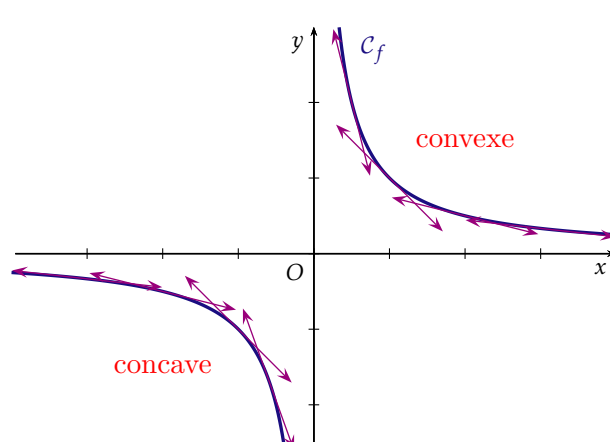
**Théorème 28.5 (Convexité d'une fonction  $\mathcal{C}^1$ )** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $f$  est convexe sur  $I$ ,
- $f'$  est croissante sur  $I$ .
- En tout point de  $I$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de ses tangentes,

## Interprétation géométrique



La fonction carré  $x \mapsto x^2$  est convexe.



La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est concave sur  $] -\infty; 0[$  et convexe sur  $] 0; +\infty[$

**Exercice 28.2**

Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1$ .

**Exercice 28.3** Montrer que  $\forall x \in ] -1; +\infty[, \quad \ln(x + 1) \leq x$ .

**Corollaire 28.1 (Convexité d'une fonction  $\mathcal{C}^2$ )** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I$ . Alors  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si pour tout  $x \in I$ ,  $f''(x) \geq 0$ .



*Remarque :* De même,  $f$  est concave sur  $I$  si et seulement si pour tout  $x \in I$ ,  $f''(x) \leq 0$ .

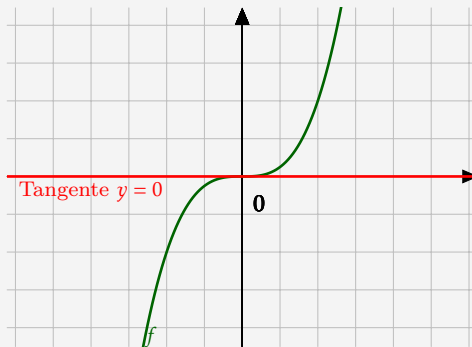
**Exemple 28.4** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = x^2 - \ln(x)$ .

### 28.2.3 Point d'inflexion

**Définition 28.5** Soit une fonction  $f$  définie au voisinage d'un réel  $x_0$  de son ensemble de définition. On dit que le point  $(x_0, f(x_0))$  est un **point d'inflexion** de la courbe  $\mathcal{C}_f$  lorsque  $f$  change de convexité en ce point (passe de «convexe» à «concave» ou bien de «concave» à «convexe»).

**Proposition 28.2** Soit une fonction  $f$  dérivable en  $x_0$ . La courbe  $\mathcal{C}_f$  possède un point d'inflexion en  $(x_0, f(x_0))$  si et seulement si la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $x_0$  «traverse»  $\mathcal{C}_f$ .

**Exemple 28.5** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$ . La tangente au point d'abscisse 0 coupe la courbe donc 0 est un point d'inflexion.



**Théorème 28.6** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle ouvert  $I$ , et soit  $x_0 \in I$ . Le point  $(x_0, f(x_0))$  est un point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_f$ , si et seulement si,  $f''$  s'annule en changeant de signe en  $x_0$ .

**Exemple 28.6** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^4 - 6x^2$ .

### 28.2.4 Extrema et fonction convexe

**Théorème 28.7** Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle ouvert  $I$ .  
Si  $x_0$  est un point critique de  $f$  alors  $f$  admet un minimum global en  $x_0$ .

*Démonstration.*

□

## 28.3 Etude graphique de fonctions. Un exemple

**Méthode 28.1 (Pour réaliser l'étude graphique d'une fonction)** Pour tracer le graphe d'une fonction, il est utile de :

- Etudier les variations de la fonction
- Rechercher des extrema (locaux, globaux)
- Chercher d'éventuelles tangentes intéressantes à la courbe
- Calculer les limites aux bornes du domaine de définition
- Rechercher d'éventuelles asymptotes (verticale, horizontale, oblique...)
- Etudier la convexité. Rechercher des points d'inflexion.

**Exercice 28.4 (Etude d'une fonction particulière)** Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 - 4\ln(x)$$

1. Montrer que  $g$  admet un minimum global sur  $]0; +\infty[$ .
2. Étudier le sens de variation de  $g$ .
3. En déduire le signe de  $g(x)$  pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1 + \ln(x)}{x}$$

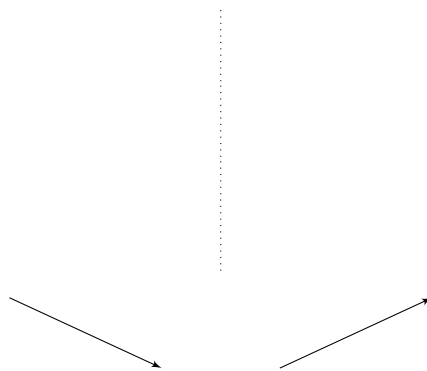
On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

4. Déterminer la limite de  $f$  en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
5. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
6. Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = \frac{x}{4}$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$ .
7. Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et de  $(D)$ . On montrera en particulier que  $(D)$  coupe  $\mathcal{C}$  en un point  $A$  dont on calculera les coordonnées.
8. Étudier le sens de variation de  $f$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .
9. Étudier la convexité de  $f$ .
10. On donne :

$$\frac{1}{e} \simeq 0,4 \quad \sqrt{e} \simeq 1,6 \quad f(\sqrt{e}) \simeq 1,3 \quad f'(\sqrt{e}) \simeq 0,1$$

Représenter la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $(D)$  dans un même repère orthonormé.

**Corrigé**



.....

