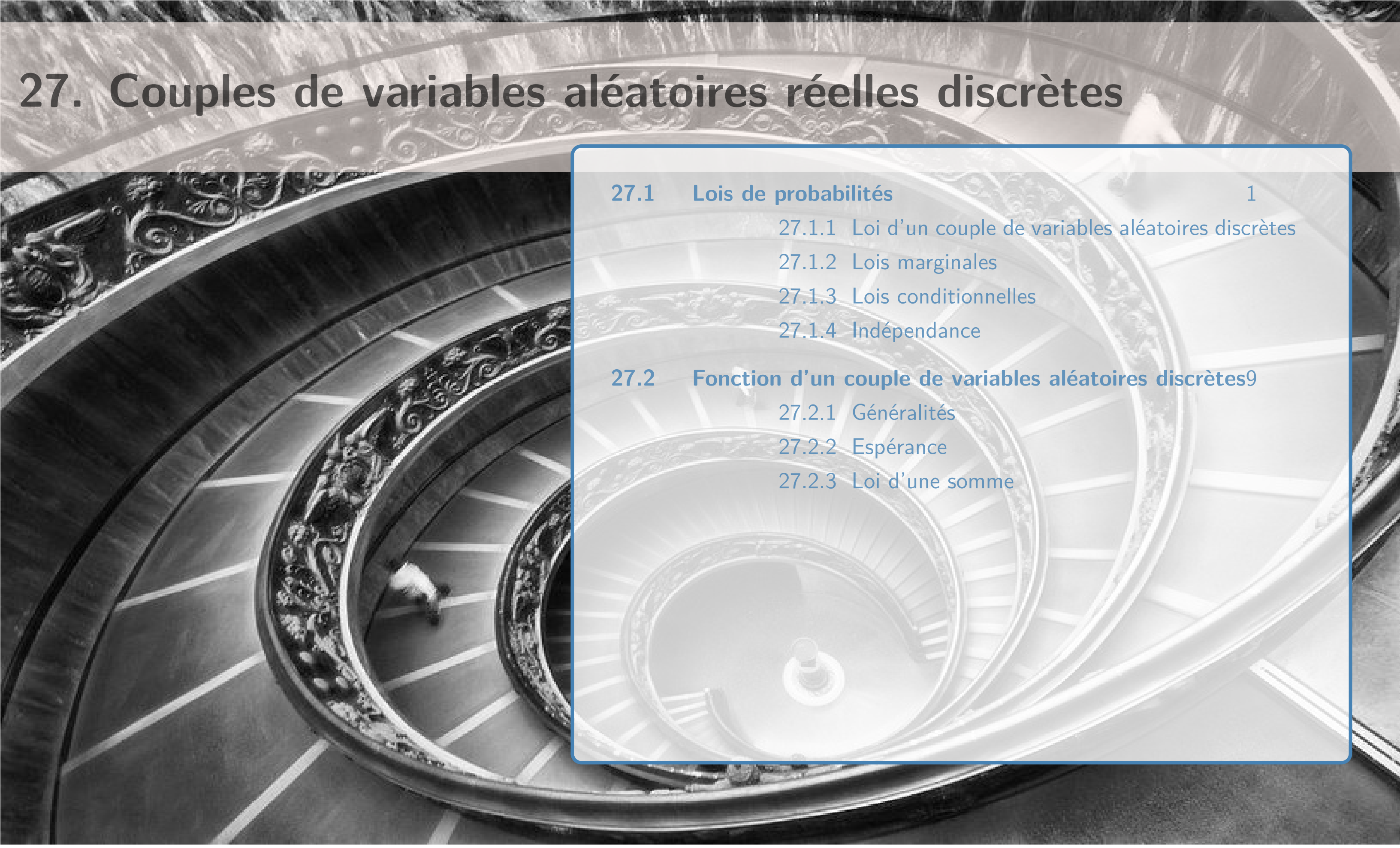
27. Couples de variables aléatoires réelles discrètes



L'illumination n'est que la vision soudaine, par l'esprit, d'une route lentement préparée.

Antoine de Saint-Exupéry

Dans ce chapitre, on étudie les couples de variables aléatoires discrètes. Connaissant la loi du couple (X, Y), on va voir comment en déduire les lois de X et de Y. Dans le cas de variables aléatoires indépendantes, on verra qu'il est alors possible de déterminer la loi du couple (X, Y) connaissant les lois de X et de Y. Enfin, nous étudierons quelques variables aléatoires particulières qui sont fonctions de variables aléatoires discrètes. Seront notamment étudiées les lois de la somme, du min et du max.

Dans ce chapitre, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

27.1 Lois de probabilités

27.1.1 Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes

Définition 27.1 On appelle **couple de variables aléatoires discrètes**, tout couple (X, Y) où X et Y désignent deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace.

Exemple 27.1

1. On lance deux dés équilibrés à 6 faces (l'un est rouge, l'autre noir). On appelle A (respectivement B) le numéro obtenu avec le dé rouge (respectivement noir).
   Comme A et B sont des variables aléatoires discrètes, alors (A, B) est un couple de variables aléatoires discrètes.
2. On lance les mêmes dés que dans l'exemple précédent. Cette fois, on appelle X le plus petit des deux numéros obtenus et Y le plus grand numéro obtenu (si les numéros sont égaux, X et Y prennent la valeur commune).
   Comme X et Y sont des variables aléatoires discrètes, alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes.

Définition 27.2 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.
On appelle **loi du couple** (X, Y) ou **loi conjointe** de X et Y la donnée des probabilités $P\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Méthode 27.1 **(Déterminer la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes)**

1. On donne les supports $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, ensembles des valeurs prises par X et Y.
2. On calcule pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ les probabilités $P\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big)$.

On peut, dans le cas de variables aléatoires finies, résumer les résultats sous la forme d'un tableau.

Exemple 27.2 Donner la loi conjointe des couples (X, Y) pour les deux exemples précédents.

1. Il y a $6 \times 6 = 36$ couples différents possibles. Comme les dés ne sont pas truqués, toutes les issues sont équiprobables et on a : pour tous k et l appartenant à $[\![1, 6]\!]$,
   $$P\Big([X = k] \cap [Y = l]\Big) = \frac{1}{36}.$$
2. Tout d'abord, X ne peut être plus grand que Y. Ainsi, si $k > l$, alors $P\Big([X = k] \cap [Y = l]\Big) = 0$. Par ailleurs, en notant A le résultat du dé rouge et B le résultat du dé noir alors pour $k < l$,
   $$P\Big([X = k] \cap [Y = l]\Big) = P\Big([A = k] \cap [B = l]\Big) + P\Big([A = l] \cap [B = k]\Big) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$
   Enfin si $k = l$, alors $P\Big([X = k] \cap [Y = l]\Big) = \dfrac{1}{36}$. J'en déduis le tableau de la loi conjointe :

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	$X=6$
$Y=1$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
$Y=2$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
$Y=3$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
$Y=4$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0	0
$Y=5$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	0
$Y=6$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Remarque : On note parfois $P\big([X=x],[Y=y]\big)$ au lieu de $P\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$, ou plus simplement $P(X=x,Y=y)$.

27.1.2 Lois marginales

Définition 27.3 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires. La loi de X est appelée **première loi marginale** du couple et celle de Y est appelée **deuxième loi marginale** du couple.

Proposition 27.1 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. On a les résultats suivants :

- Pour tout réel $x \in X(\Omega)$, $\quad P(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x,Y=y).$
- Pour tout réel $y \in Y(\Omega)$, $\quad P(Y=y) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x,Y=y).$

Démonstration. La première formules se démontre en appliquant la formule des probabilités totales associées au système complet d'événements $(Y=y)_{y\in Y(\Omega)}$.
La deuxième formules se démontre en appliquant la formule des probabilités totales associées au système complet d'événements $(X=x)_{x\in X(\Omega)}$. $\square$

Méthode 27.2 (Déterminer les lois marginales avec la loi du couple) Une fois que l'on a déterminé la loi du couple, on peut déterminer les lois marginales. La loi de X s'écrit par exemple

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y).$$

- Dans le cas de variables aléatoires finies, lorsque la loi du couple (X,Y) est donnée sous la forme d'un tableau à double entrée, on obtient les lois de X et de Y en sommant les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne, selon les cas.
- A noter que même si $Y(\Omega)$ n'est pas fini, la série converge puisque l'on calcule la probabilité d'un événement (qui existe donc).

Exemple 27.3 Déterminer les lois marginales de X et de Y pour les deux exemples précédents.

1. On a pour tout $k \in [\![1,6]\!]$,

$$P(X=k) = \sum_{i=1}^{6} P(X=k, Y=i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

   On trouve de la même façon pour la loi marginale de Y, pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, $P(Y=k) = \dfrac{1}{6}$.

2. Pour obtenir la loi de X, je fais la somme de chacune des lignes. J'obtiens :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$

   Pour obtenir la loi de Y, je fais la somme de chacune des colonnes. J'obtiens :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(Y=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

Exercice 27.1 On lance indéfiniment une pièce donnant Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $q = 1-p$ $(0 < p < 1)$. Pour tout $\in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'événement «la pièce donne Pile au k-ème tirage» et F_k l'événement «la pièce donne Face au k-ème tirage».
On note X le rang d'apparition du premier Pile et Y le rang d'apparition du deuxième Pile.
Donner la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y.

Loi du couple (X,Y)
• Pour tout couple (i,j) tel que $i \geqslant j$, on a $P(X=i, Y=j) = 0$ car le deuxième Pile ne peut pas arriver en même temps ou après le deuxième.

• Pour les autres couples, il y a quelques cas particuliers à étudier (sinon certaines écritures seraient incorrectes):

★ $i = 1$ et $j = 2$

$$(X = 1) \cap (Y = 2) = P_1 \cap P_2$$

et on a par indépendance des lancers $P(X = 1, Y = 2) = p^2$.

★ $i = 1$ et $j > 2$

$$(X = 1) \cap (Y = j) = P_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{j-1} \cap P_j$$

et on a par indépendance des lancers $P(X = 1, Y = j) = p^2 q^{j-2}$.

★ Pour tout couple $(i, i+1)$ avec $i \in [\![2, +\infty[\![$,

$$(X = i) \cap (Y = i+1) = F_1 \cap F_{i-1} \cap P_i \cap P_{i+1}$$

et on a par indépendance des lancers $P(X = i, Y = i+1) = p^2 q^{i-1}$.

★ Pour tout couple (i, j) élément de $[\![2, +\infty[\![\times [\![2, +\infty[\![$, tel que $i + 1 < j$, (c'est le cas général),

$$(X = i) \cap (Y = j) = F_1 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \ldots \cap F_{j-1} \cap P_j$$

et on a par indépendance des lancers $P(X = i, Y = j) = p^2 q^{i-2}$.

• Pour conclure, on s'aperçoit que les 4 cas se regroupent en un seul. Pour tout couple (i, j) élément de $\mathbb{N}^* \times [\![2, +\infty[\![$ et tel que $i < j$, on a :

$$P(X = i, Y = j) = p^2 q^{j-2}.$$

Loi de Y

On applique la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(X = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ce qui donne pour $j \geqslant 2$,

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i, Y = j).$$

Dans cette somme, les termes correspondants à $i \geqslant j$ sont nuls et donc la somme se réduit à :

$$\forall j \geqslant 2, \quad P(Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} P(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} p^2 q^{j-2} = p^2 q^{j-2} \sum_{i=1}^{j-1} 1 = (j-1) p^2 q^{j-2}.$$

Attention ! On ne peut en revanche pas obtenir, en général, la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des lois de X et Y.

27.1.3 Lois conditionnelles

Définition 27.4 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, on appelle loi de X **conditionnellement à l'évènement** $[Y = y]$ la donnée, pour tout $x \in X(\Omega)$, de

$$P_{[Y=y]}\big([X = x]\big) = \frac{P\big([X = x] \cap [Y = y]\big)}{P(Y = y)}.$$

<u>*Remarque*</u> *:*

- *On dit aussi "loi conditionnelle de X sachant que $[Y = y]$ est réalisé", ou plus simplement "loi de X sachant $[Y = y]$".*
- *On définit de manière similaire la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$.*

Exemple 27.4 Reprenons les deux exemples avec le lancers des deux dés, dans les deux cas, on a $P(Y = 1) \neq 0$. Déterminer alors la loi conditionnelle de X sachant $[Y = 1]$ dans les deux cas.

1. On sait que $P(Y = 1) = \frac{1}{6}$ et que pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, $P\big([X = k] \cap [Y = 1]\big) = \frac{1}{36}$. Donc pour tout entier $k \in [\![1, 6]\!]$,
$$P_{[Y=1]}\big([X = k]\big) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{36} \times \frac{6}{1} = \frac{1}{6}.$$

2. On sait que $P(Y = 1) = \frac{1}{36}$ et que pour tout $k \in [\![2, 6]\!]$, $P\big([X = k] \cap [Y = 1]\big) = 0$. Donc pour tout entier $k \in [\![2, 6]\!]$,
$$P_{[Y=1]}\big([X = k]\big) = \frac{0}{\frac{1}{36}} = 0.$$
Par ailleurs, $P\big([X = 1] \cap [Y = 1]\big) = \frac{1}{36}$ donc $P_{[Y=1]}\big([X = 1]\big) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{36}} = 1$.

Proposition 27.2 **(Loi marginale et loi conditionnelle)** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires.

- Si l'on connaît la loi marginale de Y, ainsi que la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$, alors la loi de X est déterminée par

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y) \times P_{[Y=y]}(X = x).$$

- Si l'on connaît la loi marginale de X, ainsi que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$, alors la loi de Y est déterminée par

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) \times P_{[X=x]}(Y = y).$$

Démonstration. On sait par définition de la loi marginale que

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

Il suffit alors d'utiliser la formule des probabilités composées, on a alors:

$$P(X = x, Y = y) = P([X = x] \cap [Y = y]) = P(Y = y) \times P_{[Y=y]}(X = x).$$

On obtient alors la formule voulue. □

Exercice 27.2 On suppose données deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé telles que : X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et pour tout entier naturel k, la loi de Y sachant $(X = k)$, est la loi binomiale $\mathcal{B}(k, p)$ avec $0 < p < 1$.
Donner la loi de Y.

• Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, Y peut prendre toutes les valeurs entre 0 et k et comme k parcourt $\mathbb{N}$, on en conclut $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
• D'après la définition de la binomiale, on a :

$$P_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} & \text{si} \quad 0 \leqslant j \leqslant k \\ 0 & \text{si} \quad j > k \end{cases}$$

La famille $(X = k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, chacun étant de probabilité non nulle, on obtient, d'après la formule des probabilités totales:

$$P(Y = j) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y = j) P(X = k).$$

Comme les valeurs de $P_{[X=k]}(Y=j)$ sont nulles pour $k<j$, il reste :

$$\begin{aligned}
P(Y=j) &= \sum_{k=j}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y=j)P(X=k) \\
&= \sum_{k=j}^{+\infty} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{k!}{j!(k-j)!} p^j (1-p)^{k-j} \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \frac{p^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=j}^{+\infty} (1-p)^{k-j} \frac{\lambda^k}{(k-j)!} \\
&= \frac{p^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{l=0}^{+\infty} (1-p)^{l} \frac{\lambda^{l+j}}{l!} \quad \text{en posant } l=k-j \\
&= \frac{(\lambda p)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^l}{l!} \\
&= \frac{(\lambda p)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda p)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

Ainsi Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

27.1.4 Indépendance

Définition 27.5 On dit que deux variables aléatoires discrètes X et Y sont **indépendantes** lorsque

$$\forall (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega), \quad P(X=x, Y=y) = P(X=x)\times P(Y=y).$$

Remarque : Ainsi, ***dans le cas de deux variables aléatoires indépendantes****, on peut déterminer la loi du couple (X,Y) à partir des lois de X et de Y.*

Exemple 27.5 Tester l'indépendance des variables aléatoires X et Y pour les deux exemples avec les lancers de dés.

1. Au vu de la loi conjointe et des lois marginales, pour tous k et l appartenant à $[\![1,6]\!]$,
$$P\Big([X=k]\cap[Y=l]\Big) = P\Big([X=k]\Big)\times P\Big([Y=l]\Big).$$
Ainsi les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
2. $P\Big([X=2]\cap[Y=1]\Big)=0$ mais
$$P\Big([X=2]\Big)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P\Big([Y=1]\Big)=\frac{1}{36}.$$
Donc $P\Big([X=2]\cap[Y=1]\Big)\neq P\Big([X=2]\Big)\times P\Big([Y=1]\Big)$.
Et les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Proposition 27.3 **(Lemme des coalitions)** Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors toute variable aléatoire fonction de X est indépendante de toute variable aléatoire fonction de Y.

27.2 Fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes

27.2.1 Généralités

Proposition 27.4 Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes et g une application de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. La variable aléatoire $Z=g(X,Y)$ est alors également discrète.

Exemple 27.6 En particulier, si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, alors $X+Y$, XY , $\max(X,Y)$ et $\min(X,Y)$ sont aussi des variables aléatoires discrètes.

Méthode 27.3 (Comment déterminer la loi de $\max(X,Y)$ si X et Y sont indépendantes?)
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour trouver la loi de $S = \max(X,Y)$, on utilise la fonction de répartition, après avoir justifié l'égalité suivante :

$$\forall k \in S(\Omega), \quad [S \leqslant k] = [X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]$$

On obtient alors la loi de S avec

$$\forall k \in S(\Omega), P(S = k) = P(S \leqslant k) - P(S \leqslant k-1) = F_S(k) - F_S(k-1).$$

Remarque : *Montrons l'égalité $\forall k \in S(\Omega), \quad [S \leqslant k] = [X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]$.*

($\subset$) *Soit $\omega \in [S \leqslant k]$ alors $S(\omega) \leqslant k$ soit $\max(X(\omega), Y(\omega)) \leqslant k$ soit $X(\omega) \leqslant k$ et $Y(\omega) \leqslant k$ soit $\omega \in [X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]$. D'où la première inclusion.*

$() \supset$ *Soit $\omega \in [X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]$ alors $X(\omega) \leqslant k$ et $Y(\omega) \leqslant k$ soit $\max(X(\omega), Y(\omega)) \leqslant k$ soit $\omega \in [S \leqslant k]$. D'où la deuxième inclusion.*

Exercice 27.3 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard deux boules, avec remise de la boule tirée. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule et Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule. On pose $S = \max(X,Y)$, ce qui signifie que $\forall \omega \in \Omega$, $S(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega))$. Donner la loi de S.

- On a bien sûr $S(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
- Pour chaque $\omega \in \Omega$, dire que le plus grand numéro obtenu $S(\omega)$ est inférieur ou égal à k implique que les deux numéros $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ sont inférieurs ou égaux à k. On a donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
$$(S \leqslant k) = (X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k).$$
- Les tirages ont lieu avec remise, ce qui rend les variables aléatoires X et Y indépendantes, et on a:
$$P(S \leqslant k) = P(X \leqslant k) P(Y \leqslant k).$$
Par équiprobabilité, on obtient:
$$P(S \leqslant k) = \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{k^2}{n^2}.$$
- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on sait que:
$$P(S = k) = P(S \leqslant k) - P(S \leqslant k-1).$$
On en déduit :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(S = k) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Remarque : Parfois l'énoncé invite à suivre une autre méthode que celle ci-dessus, il faut bien évidemment suivre la méthode de l'énoncé.

Méthode 27.4 (Comment déterminer la loi de $\min(X,Y)$ si X et Y sont indépendantes?) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour trouver la loi de $I = \min(X,Y)$, on utilise la fonction de répartition de manière différente que dans le cas $\max(X,Y)$, après avoir justifié l'égalité suivante :

$$\forall k \in I(\Omega), \quad [I > k] = [X > k] \cap [Y > k]$$

On obtient alors la loi de I avec

$$\forall k \in I(\Omega), P(I = k) = P(I \leqslant k) - P(I \leqslant k-1) = P(I > k-1) - P(I > k)$$

Exercice 27.4 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard deux boules, avec remise de la boule tirée. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule et Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule. On pose $I = \min(X,Y)$, ce qui signifie que $\forall \omega \in \Omega, I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.
Donner la loi de I.

- On a bien sûr $I(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
- Pour chaque $\omega \in \Omega$, dire que le plus petit numéro obtenu $I(\omega)$ est strictement supérieur à k implique que les deux numéros $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ sont strictement supérieurs à k. On a donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$(I > k) = (X > k) \cap (Y > k).$$

- Les tirages ont lieu avec remise, ce qui rend les variables aléatoires X et Y indépendantes, et on a:

$$P(I > k) = P(X > k)P(Y > k).$$

Par équiprobabilité, on obtient:

$$P(I > k) = \frac{n-k}{n} \times \frac{n-k}{n} = \frac{(n-k)^2}{n^2}.$$

- Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on sait que:

$$P(I = k) = P(I \leqslant k) - P(I \leqslant k-1) = 1 - P(I > k) - (1 - P(I > k-1)) = P(I > k-1) - P(I > k).$$

On en déduit :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad P(I = k) = \frac{(n-k+1)^2}{n^2} - \frac{(n-k)^2}{n^2} = \frac{2n-2k+1}{n^2}.$$

27.2.2 Espérance

Propriété 27.1 (Linéarité de l'espérance) Si deux variables aléatoires X et Y ont chacune une espérance, alors, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $aX + bY$ possède une espérance et on a :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Exemple 27.7 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, 12]\!]$ et Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(7, \frac{1}{3}\right)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Z = 2X - Y$.

Comme $E(X) = \frac{12+1}{2} = \frac{13}{2}$ et $E(Y) = 7 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$, alors

$$E(Z) = 2E(X) - E(Y) = 2 \times \frac{13}{2} - \frac{7}{3} = 13 - \frac{7}{3} = \frac{39}{3} - \frac{7}{3} = \frac{32}{3}.$$

Propriété 27.2 (Croissance de l'espérance) Soient deux variables aléatoires X et Y ayant chacune une espérance. Si $X \leqslant Y$ presque sûrement (i.e. $P(X \leqslant Y) = 1$), alors

$$E(X) \leqslant E(Y)$$

Exemple 27.8 En reprenant les situations des exercices 27.3 et 27.4, on a $I \leqslant S$ presque sûrement. On a donc $E(I) \leqslant E(S)$.

Théorème 27.1 (Théorème de transfert) Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes et g une application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. On a (sous réserve d'existence)

$$E(g(X, Y)) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} g(x, y) P([X = x] \cap [Y = y]).$$

Exercice 27.5 En reprenant la situation de l'exercice 27.3, calculer de deux manières différentes l'espérance de S.

Méthode 1:
On a déterminé dans l'exercice 27.3 la loi de la variable aléatoire S. C'est une variable aléatoire finie, elle admet donc une espérance et on a :

$$\begin{aligned}
E(S) &= \sum_{k=1}^{n} kP(S=k) = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{2k-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 2k^2 - k \\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{2}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{3n} - \frac{n+1}{2n} \\
&= \frac{(n+1)(4n+2-3)}{6n} \\
&= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.
\end{aligned}$$

Méthode 2:
On utilise le théorème de transfert. Cette méthode serait particulièrement utile si on n'avait pas déjà calculé la loi de S.
S est une variable aléatoire finie, elle admet donc une espérance et on a, d'après le théorème de transfert:

$$E(S) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \max(k,l) P(X=k, Y=l)$$

Or les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et les tirages sont équiprobables, on a donc :

$$P(X=k, Y=l) = P(X=k)P(Y=l) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
E(S) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \max(k,l) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k} k + \sum_{l=k+1}^{n} l\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} l - \sum_{l=1}^{k} l\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}\right) \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} + \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(S) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} + \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} + \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n} - \frac{n+1}{4n} \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{12n} + \frac{6n(n+1)}{12n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n} - \frac{3(n+1)}{12n} \\
&= \frac{n+1}{12n} \times (4n+2+6n-2n-1-3) \\
&= \frac{(n+1)(8n-2)}{12n} = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.
\end{aligned}$$

Proposition 27.5 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance alors XY admet une espérance et on a:

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Attention ! L'égalité $E(XY) = E(X)E(Y)$ peut être vérifiée sans que les variables aléatoires X et Y ne soient indépendantes.

27.2.3 Loi d'une somme

Proposition 27.6 (Loi d'une somme de deux variables aléatoires discrètes et indépendantes) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et **indépendantes**. La loi de $X+Y$ est donnée par l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\forall z \in (X+Y)(\Omega), \quad P(X+Y=z) &= \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ x+y=z}} P([X=x]\cap[Y=y])\\ &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ z-x\in Y(\Omega)}} P(X=x)P(Y=z-x).\end{aligned}$$

Remarque : On peut bien sûr utiliser le système complet d'événements $(Y=y)_{y\in Y(\Omega)}$ ce qui donne :

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega), \quad P(X+Y=z) = \sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ z-y\in X(\Omega)}} P(Y=y)P(X=z-y).$$

Méthode 27.5 (Comment déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes ?) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et indépendantes. On utilise l'égalité précédente pour déterminer la loi de $X+Y$.

Proposition 27.7 (Stabilité de la loi binomiale par l'addition) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1,p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2,p)$, alors

$$X_1+X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1+n_2,p).$$

Démonstration. On a : $X_1(\Omega)=[\![0,n_1]\!]$ et $X_2(\Omega)=[\![0,n_2]\!]$ donc $(X_1+X_2)(\Omega)=[\![0,n_1+n_2]\!]$. Soit $k\in[\![0,n_1+n_2]\!]$, on a:

$$\begin{aligned}P(X_1+X_2=k) &= \sum_{j=0}^{k} P(X_1=j)P(X_2=k-j)\\ &= \sum_{j=0}^{k}\left(\binom{n_1}{j}p^j(1-p)^{n_1-j}\right)\left(\binom{n_2}{k-j}p^{k-j}(1-p)^{n_2-(k-j)}\right)\\ &= p^k(1-p)^{(n_1+n_2)-k}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j}\right)\\ &= p^k(1-p)^{(n_1+n_2)-k}\binom{n_1+n_2}{k} \quad \text{(d'après l'identité de Vandermonde)}\end{aligned}$$

On obtient bien que $X_1+X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$. $\square$

Proposition 27.8 (Stabilité de la loi de Poisson par l'addition) Soient $\lambda, \mu > 0$. Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

Démonstration. On a : $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, on a:

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X_1 = j)P(X_2 = k - j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda} \times \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}\mathrm{e}^{-\mu} \quad \text{car } P(X_2 = k - j) = 0 \text{ pour } k - j < 0 \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda^j \mu^{k-j} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j \mu^{k-j} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} (\lambda + \mu)^k \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}
\end{aligned}$$

On obtient bien que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$. □