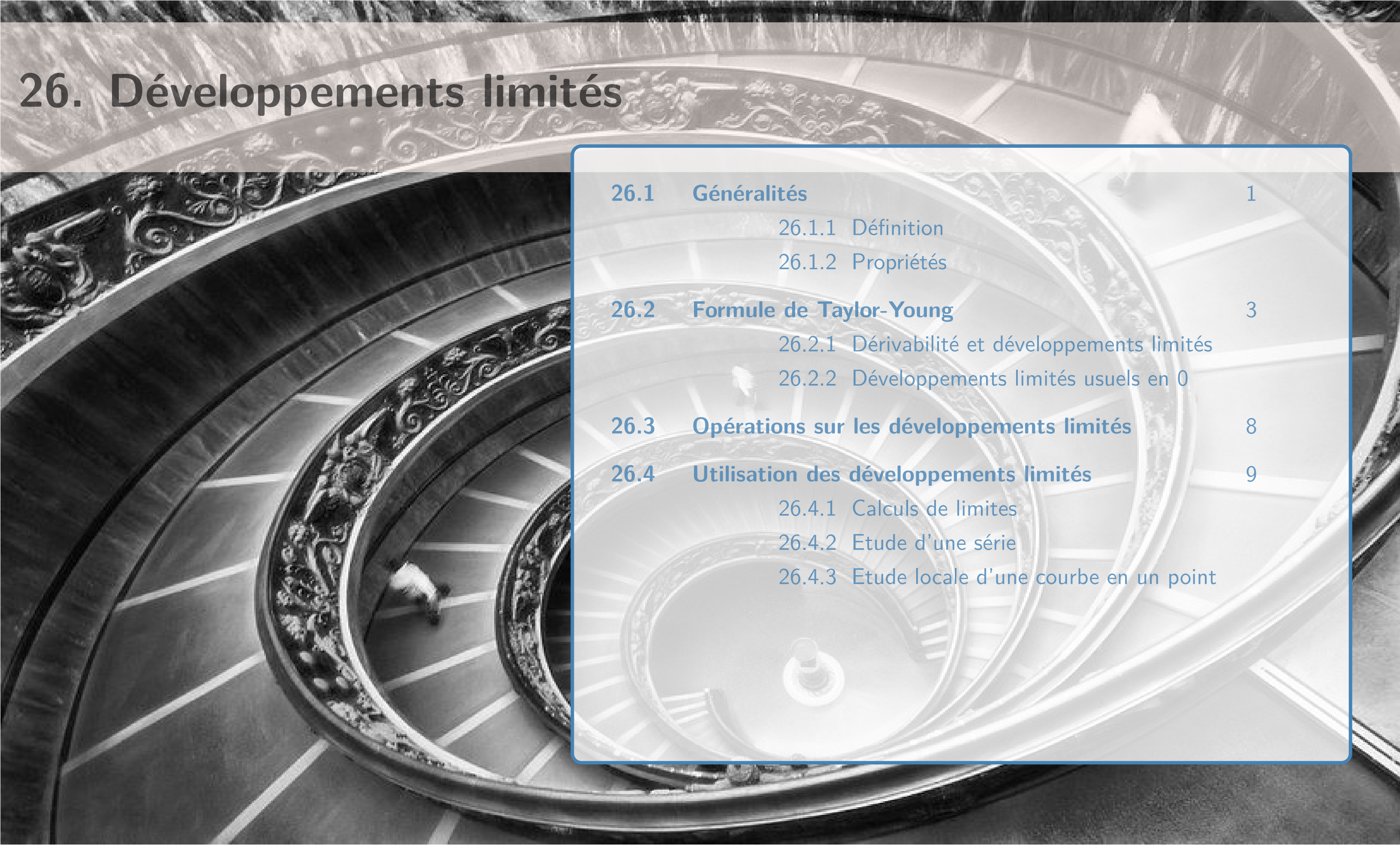


26. Développements limités

> We mathematicians are all a little bit crazy.
>
> *Edmund Landau*

Dans ce chapitre, nous allons apprendre à écrire le développement limité d'une fonction en un point. Nous verrons un nouvelle formule de Taylor, en lien direct avec les développements limités. Elle nous permettra notamment de déterminer les développements limités des fonctions usuelles.
Les développements limités ont diverses applications. Ils peuvent permettre de lever encore plus de formes indéterminées que les équivalents. Grâce aux développements limités, on peut également étudier l'allure locale du graphe d'une fonction en un point donné.

26.1 Généralités

26.1.1 Définition

Définition 26.1 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage du réel x_0, on dit que f admet **un développement limité à l'ordre** n **en** x_0 lorsqu'il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Le polynôme $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$ est appelé la **partie régulière** du développement limité.

Exemple 26.1 On a : $\sin(x) \underset{0}{=} x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque :

- *Il est équivalent d'écrire le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de x_0 sous la forme :*

$$f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

  On peut remarquer que chaque terme est négligeable devant celui qui le précède.

- *Un développement limité est local : c'est à dire qu'il ne donne de l'information que sur le comportement de f autour du point x_0.*

Exemple 26.2 La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + x^2 \sin(x)$ possède un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) \underset{0}{=} 1 + 2x - 3x^2 + o(x^2).$$

26.1.2 Propriétés

Proposition 26.1 **(Unicité du développement limité)** Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, alors ce développement est unique.

Démonstration.

□

De l'unicité du développement limité découle la propriété suivante :

Propriété 26.1 Si une fonction f est paire (resp. impaire) et admet un développement limité en 0 alors sa partie régulière ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

26.2 Formule de Taylor-Young

26.2.1 Dérivabilité et développements limités

Proposition 26.2 **(Existence d'un développement limité d'ordre 0)** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et f une fonction définie en x_0 et au voisinage de ce point.
La fonction f est continue en x_0 si et seulement si $f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + o(1)$.

Démonstration.

□

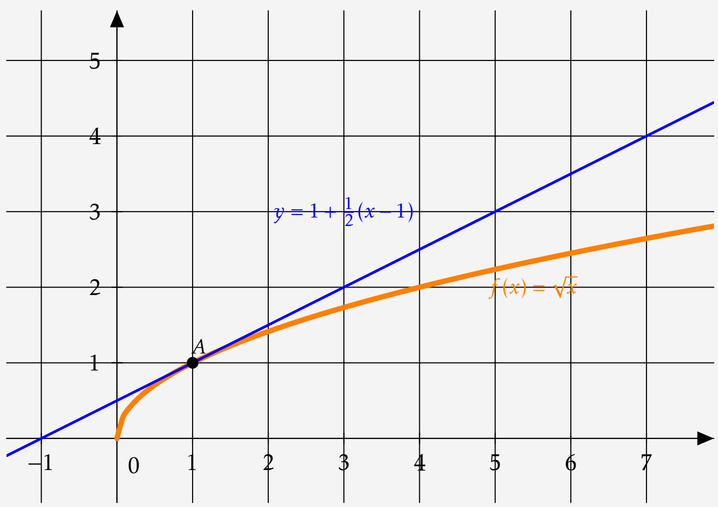
Proposition 26.3 **(Existence d'un développement limité d'ordre 1)** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et f une fonction définie en x_0 et au voisinage de ce point.
La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0. On a alors :

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)).$$

Démonstration.

□

Exemple 26.3 Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 = 1$.



Autrement dit, $y = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1)$ est la **meilleure approximation affine** de f au voisinage de 1. On retrouve l'équation de la tangente à la courbe au point A.

Théorème 26.1 **(Formule de Taylor-Young)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$ alors f admet un développement limité d'ordre n en x_0 et on a :

$$f(x) \underset{x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Remarque : En pratique, la plupart des développements limités sont effectués au voisinage de 0. La formule de Taylor-Young donne alors :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

26.2.2 Développements limités usuels en 0

Proposition 26.4 (Développements limités usuels en 0)

1. $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$

2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$

3. Les fonctions inverses :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

4. Les fonctions puissances, pour tout réel α,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

5. Les fonctions trigonométriques

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

Remarque : Pour les fonctions trigonométriques, les exposants $2k$ et $2k+1$ ont été introduits pour permettre d'avoir des formules simples, mais il faut garder à l'esprit que l'ordre d'un développement limité correspond à la puissance qui apparaît dans le o.

Démonstration.

□

Méthode 26.1 (Pour calculer un DL en 0) Lorsque la fonction a une expression très proche d'une fonction usuelle, il faut transformer l'expression pour se ramener à une fonction usuelle quitte à effectuer un changement de variables.

Exercice 26.1 Ecrire les développements limités demandés dans chaque cas :

1. $x \mapsto \sin(x)$ en 0 à l'ordre 4 ,

2. $x \mapsto \sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 3 ,

3. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en 0 à l'ordre 4 ,

4. $x \mapsto \exp(2x)$ en 0 à l'ordre 2 ,

5. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ en 0 à l'ordre 5 ,

6. $x \mapsto \ln(2+x)$ en 0 à l'ordre 3,

Remarque : D'un DL en x_0, on peut toujours se ramener à un DL en 0 en effectuant le changement de variable $h = x - x_0$.

Exercice 26.2

1. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $x \mapsto \ln(x)$.

2. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 en -1 de $x \mapsto (2+x)^\alpha$.

26.3 Opérations sur les développements limités

Proposition 26.5 (Somme de développements limités) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0. On suppose que f et g admettent chacune un développement limité d'ordre n en x_0. Alors $f + \alpha g$ admet un développement limité d'ordre n en x_0.
De plus, si on note P_f (resp. P_g, $P_{f+\alpha g}$) la partie régulière du développement limité de f (resp. g, $f + \alpha g$), on a :

$$P_{f+\alpha g} = P_f + \alpha P_g.$$

Exercice 26.3 Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$.

Proposition 26.6 (Produit de développements limités) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0. On suppose que f et g admettent chacune un développement limité d'ordre n en x_0. Alors fg admet un développement limité d'ordre n en x_0.
La partie régulière du développement limité de fg est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières de f et g.

Exercice 26.4 Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \dfrac{e^x}{1-x}$.

Exercice 26.5 Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 1 de $f : x \mapsto \frac{\exp x}{x}$.

26.4 Utilisation des développements limités

26.4.1 Calculs de limites

Exercice 26.6 Montrer que la fonction f définie sur $]0,1]$ par

$$\forall x \in]0,1], \quad f(x) = \frac{2}{\sin(x)} - \frac{2}{\ln(1+x)}$$

est prolongeable par continuité en 0 .

Méthode 26.2 **(Pour calculer une limite)** On a maintenant beaucoup de méthodes possibles. Il faut choisir la plus rapide pour résoudre notre problème. Par ordre, on essaiera:

1. de conclure directement (si il n'y a pas de forme indéterminée)
2. de lever la forme indéterminée via une limite usuelle (croissances comparées, taux d'accroissements,...) ou une technique usuelle (quantité conjuguée, ...).
3. de conclure en utilisant les équivalents (attention pas de sommes!)
4. de conclure en écrivant des développements limités à l'ordre suffisant pour supprimer le problème.

Exercice 26.7 Calculer
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)+2\cos(x)-2}{x^4}.$$

26.4.2 Etude d'une série

Exercice 26.8 Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$?

26.4.3 Etude locale d'une courbe en un point

Méthode 26.3 Si au voisinage de 0, on a $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$, alors:

- La droite d'équation $y = a_0 + a_1 x$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
- Si $a_2 < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est localement située en dessous de sa tangente.
- Si $a_2 > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est localement située au-dessus de sa tangente.

Exercice 26.9 Etudier l'allure de la courbe au voisinage de 0 de la fonction définie par

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad f(x) = e^{-2x}\sqrt{1+x}.$$