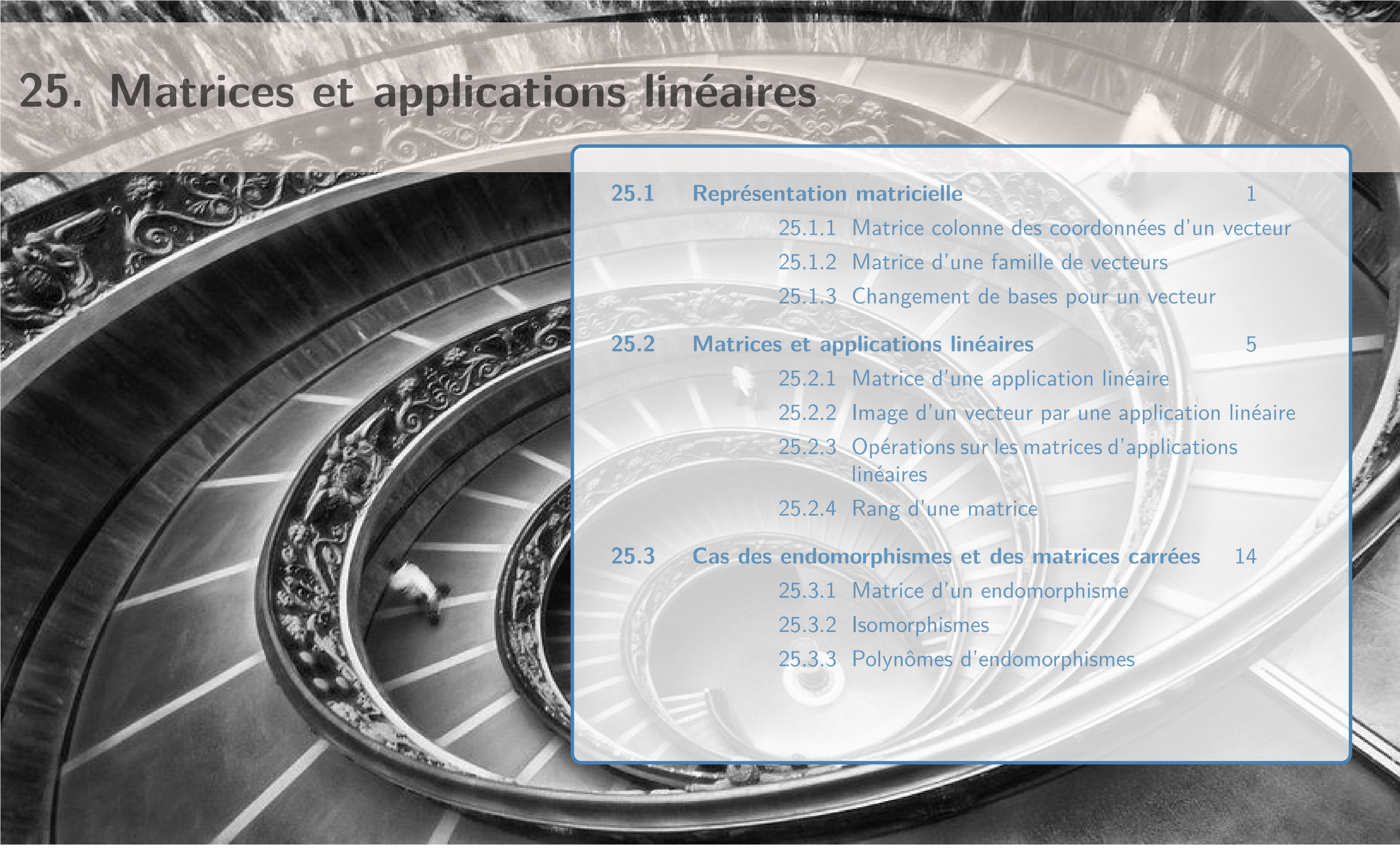

25. Matrices et applications linéaires

Les chaussures sont un instrument pour marcher, les maths sont un instrument pour penser. On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin.

Jean-Marie Souriau (1995)

Dans ce chapitre, nous allons faire le lien entre les matrices et les applications linéaires. Nous verrons comment représenter une application linéaire par une matrice, comment en déduire son rang, comment savoir si elle est bijective...

Dans tout le chapitre, tous les espaces vectoriels considérés seront de dimension finie.

25.1 Représentation matricielle

25.1.1 Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur

Définition 25.1 Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Tout élément $x \in E$ s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{avec } x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in [\![1, n]\!].$$

La matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est appelée **matrice colonne des coordonnées** du vecteur x dans la base $\mathcal{B}_E$.

Exemple 25.1 On considère le polynôme $P(x) = 1 + x^2 + 3x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$. Le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base $\left(1, x, x^2, x^3\right)$ est

25.1.2 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition et premiers exemples

Définition 25.2 **(Matrice d'une famille de vecteurs dans une base)** Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = \left(x_1, \ldots, x_p\right)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle **matrice de la famille de vecteurs** $\left(x_1, \ldots, x_p\right)$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(x_1, \ldots, x_p\right)$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j-ème colonne est la colonne des composantes de x_j dans la base $\mathcal{B}$ (pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$).

Exemple 25.2

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère les vecteurs :

$$x_1 = (1, 2, 3), \quad x_2 = (2, 0, 1), \quad x_3 = (1, 0, -1), \quad x_4 = (-1, 1, 1).$$

On a alors :

2. Dans $\mathbb{R}^n$, la matrice de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est :

3. Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. On pose $P = x^2 + 3x + 4$. La matrice de la famille (P, P', P'') dans la base $\mathcal{B}$ est alors :

25.1.3 Changement de bases pour un vecteur

Exemple 25.3 On se place sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$. Soit $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3) = (1, x, x^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. On introduit les polynômes :

$$Q : x \mapsto x \quad ; \quad R : x \mapsto x^2 + 1 \quad ; \quad S : x \mapsto x^2 - 1.$$

On a montré dans le Chapitre 12 que la famille $\mathcal{B}' = (Q, R, S)$ formait une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Soit $T = 5x^2 + x - 1$. Déterminons les coordonnées du polynôme T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Définition 25.3 (Matrice de passage) Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E. On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, la matrice :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n).$$

Proposition 25.1 (Inversibilité de la matrice de passage) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'une espace vectoriel E, la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = I_n$. □

Proposition 25.2 Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'une espace vectoriel E et $x \in E$, si $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ alors

$$X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'.$$

Démonstration.

□

Exemple 25.4 Reprenons l'Exemple 25.3. La matrice P que nous avions déterminée était donc $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. On avait donc bien la relation $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'$.

Exemple 25.5 On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère $\mathcal{B}' = ((1,1,-1),(-1,1,1),(1,-1,1))$ une autre base de E. Soit le vecteur $x = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$. Déterminons la matrice colonne des coordonnées de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

25.2 Matrices et applications linéaires

25.2.1 Matrice d'une application linéaire

Définition 25.4 Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et F un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ de base $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$.
Soit f une application linéaire de E dans F, on appelle **matrice de l'application f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$**, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne est composée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ (pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$).

Attention ! Dans certains livres, la notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ peut être utilisée mais le programme impose la notation de la définition.

Illustration

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 25.6 On considère l'application linéaire f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f((x,y,z)) = (2x+y, 4y, y+z, 6z).$$

On note $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_4 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer la matrice de l'application f dans les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_4$.

2. Soit $\mathcal{B}_3' = (e_1, e_1+e_2, e_1-e_3)$ une autre base de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de l'application f dans les bases $\mathcal{B}_3'$ et $\mathcal{B}_4$.

Exemple 25.7 Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E. On a :

Exemple 25.8 Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui a polynôme P associe son polynôme dérivé P'. On note $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$.

Exemple 25.9 Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, déterminons la matrice de l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & MX \end{cases}$$

Remarque : Comme une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base, une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice dans deux bases données. Cependant, deux matrices associées à une application linéaire sont différentes si on ne considère pas les mêmes bases.

Définition 25.5 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice) Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ les bases canoniques respectives de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'application linéaire f de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui vérifie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_p}(f) = A$ est appelée **application linéaire canoniquement associée à** A et vérifie :

$$\text{pour tout } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall i \in [\![1,n]\!], \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_i,$$

où les a_{ij} désignent les coefficients de la matrice A.

Exemple 25.10 On considère la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Donner son application linéaire canoniquement associée.

Proposition 25.3 (Matrice d'une forme linéaire) Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et de base $\mathcal{B}_E$, on rappelle que (1) est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$. Soit f une forme linéaire sur E alors $\mathrm{Mat}_{(1),\mathcal{B}_E}(f)$ est une matrice ligne (à p colonnes).

Démonstration.

$\square$

25.2.2 Image d'un vecteur par une application linéaire

Exercice 25.1 On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que $M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_3}(f)$ où $\mathcal{B}_3$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_4$ celle de $\mathbb{R}^4$.

1. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f((x, y, z))$.

2. Calculer $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

3. Que remarque-t-on ?

Cette constatation est générale. On peut la formaliser de la manière suivante.

Théorème 25.1 **(Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur)** Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base $\mathcal{B}_E$, et F un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base $\mathcal{B}_F$. Soit f une application linéaire de E dans F et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$.
Soit $x \in E$, $y \in F$ et X et Y les matrices colonnes de leurs coordonnées dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. On a :

$$y = f(x) \Longleftrightarrow Y = AX.$$

Démonstration.

□

Exemple 25.11 On réutilise l'application g de l'Exemple 25.8 et le polynôme $P(x) = 1 + x^2 + 3x^3$ de l'Exemple 25.1 . Alors,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Remarque : Soit E et F deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Soit f une application linéaire de E dans F. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$.
Chercher le noyau de f revient à résoudre le système $AX = 0$.

25.2.3 Opérations sur les matrices d'applications linéaires

Proposition 25.4 Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base $\mathcal{B}_E$, et F un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base $\mathcal{B}_F$. Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)$$

Théorème 25.2 (Matrice d'une composée d'applications linéaires) Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f).$$

Démonstration.

□

Remarque : Composer des applications linéaires revient donc à multiplier des matrices.

Exemple 25.12 Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B}$.
Un endomorphisme f de E est un projecteur ssi $f \circ f = f$. Notons $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. La condition $f \circ f = f$ se traduit par :

25.2.4 Rang d'une matrice

Définition 25.6 (Rang d'une matrice) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **rang** de la matrice A et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de la famille des vecteurs colonnes de A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 25.13 Quel est le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$?

Proposition 25.5 (Matrice de rang nul) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a:

$$\mathrm{rg}(A) = 0 \iff A = 0.$$

Démonstration.

□

Théorème 25.3 (Lien entre rang d'une application linéaire et de sa matrice) Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, F un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application linéaire de E dans F. Soit A la matrice de l'application f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. On a:

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A).$$

Démonstration.

□

<u>Remarque</u> : Le rang d'une application linéaire est donc le rang de n'importe laquelle de ses matrices associées : le choix des bases n'importe pas.

Proposition 25.6 (Rang de la transposée) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA).$$

Remarque : Par conséquent, le rang de A est égal au rang de la famille formée par ses colonnes mais également au rang de la famille formée par ses lignes.

Méthode 25.1 **(Calcul du rang d'une matrice)** Pour calculer le rang d'une matrice, on peut appliquer le pivot de Gauss sur les colonnes de la matrices jusqu'à obtenir une matrices triangulaire.
Si cela est plus simple, on peut décider d'appliquer le pivot de Gauss sur les lignes, puisque le rang d'une matrice et le même que celui de sa transposée.

Exercice 25.2 Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de f.

25.3 Cas des endomorphismes et des matrices carrées

25.3.1 Matrice d'un endomorphisme

Définition 25.7 Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base $\mathcal{B} = \left(e_1, \dots, e_p\right)$ et f un endomorphisme de E. On appelle **matrice de l'endomorphisme** f dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice carrée de $M_p(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne est composée des coordonnées du vecteur $f\left(e_j\right)$ dans la base $\mathcal{B}$ (pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$).

Exemple 25.14 On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (3x - z, x + 2y + z, -x + 3y - 4z).$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors on a :

Remarque : Si E est un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
On remarque que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{Id}_E(e_i) = e_i$ donc la matrice associée à l'endomorphisme identité est I_p et ne dépend pas de la base de E choisie.
Notons θ_E l'application nulle de E, on remarque que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\theta(e_i) = 0$ donc la matrice associée à l'endomorphisme nul est la matrice nulle 0_p et ne dépend pas de la base de E choisie.

Proposition 25.7 (Formule du binôme de Newton pour deux endomorphismes) Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E qui commutent i.e. tel que $f \circ g = g \circ f$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

Proposition 25.8 (Formule du binôme de Newton pour deux matrices) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^2$ tels que $AB = BA$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Exercice type 25.1 On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A = 2I_3 + J$ avec J une matrice à déterminer.

2. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

25.3.2 Isomorphismes

Théorème 25.4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E, soit f un endomorphisme de E alors f est bijectif si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible et on a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.

Démonstration.

□

Exemple 25.15 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f((x, y)) = (x + 2y, 2x + 2y)$. Montrer que f est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

Proposition 25.9 **(Matrice de rang n)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{rg}(A) = n \iff A \text{ est inversible.}$$

Démonstration.

□

25.3.3 Polynômes d'endomorphismes

Définition 25.8 (Polynôme d'endomorphisme) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $P(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$. On appelle $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum_{i=0}^{p} a_i f^i$.

Exemple 25.16 Soit $P(x) = 3x^2 + 2x + 4$ et f un endomorphisme de E alors :

Définition 25.9 (Polynôme de matrice carrée) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$ et $P(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$. On appelle $P(A)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $P(A) = \sum_{i=0}^{p} a_i A^i$.

Exemple 25.17 Soit $P(x) = 3x^2 + 2x + 4$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors :

Proposition 25.10 (Règles de calcul) Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$(\lambda P + Q)(f) = \lambda P(f) + Q(f) \quad \text{et} \quad (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$$

De même, soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$(\lambda P + Q)(A) = \lambda P(A) + Q(A) \quad \text{et} \quad (PQ)(A) = P(A)Q(A)$$

Démonstration.

□

Définition 25.10 (Polynôme annulateur) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de f lorsque $P(f) = 0$.

Remarque : On peut de même parler de polynôme annulateur d'une matrice A si $P(A) = 0$.

Exemple 25.18 Dans le cas d'un projecteur p, on a $p \circ p = p$ donc $p^2 = p$ soit $p^2 - p = 0$ ainsi le polynôme $x^2 - x$ est un polynôme annulateur de p.

Méthode 25.2 (Polynôme annulateur et calcul d'inverse) Il est possible de déterminer la réciproque d'un endomorphisme en utilisant un polynôme annulateur (qui doit alors avoir un terme constant non nul).
On peut également calculer l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur (qui doit avoir également un terme constant non nul). *cf Chapitre 6*

Exercice 25.3 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E et $P(x) = 2x^3 + x + 3$. On suppose que P est un polynôme annulateur de f. Montrer que f est bijective et déterminer une expression de f^{-1}.

Exercice 25.4 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P(x) = x^2 + 5x + 2$. On suppose que P est un polynôme annulateur de A. En déduire que A est inversible et donner une expression de A^{-1}.

Méthode 25.3 (Polynôme annulateur et puissance de matrice) Les polynômes annulateurs permettent aussi de calculer les puissances d'une matrice.

Exercice 25.5 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P(x) = x^2 - 5x + 6$. On suppose que P est un polynôme annulateur de A. En déduire une expression de A^k, pour $k \in \mathbb{N}$.