24. Variables aléatoires discrètes

C'est par la logique que nous démontrons, mais c'est par l'intuition que nous découvrons ; sans elle, le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées

Henri Poincaré (1854-1912)

Dans ce chapitre, nous allons étendre la notion de variable aléatoire au cas d'un univers infini dénombrable. On généralise également les notions de loi, d'espérance, variance. Les calculs de sommes que l'on rencontrait dans le cas d'univers finis deviennent des calculs de séries pour les univers infinis. Nous introduisons également une nouvelle notion, celle de fonction de répartition.
Comme dans les cas des univers finis, de nombreuses variables aléatoires rencontrées dans les modèles mathématiques suivent un petit nombre de lois, nommées en conséquence ***lois usuelles****. Dans la dernière partie, on étudie ces lois. Les résultats pourront ensuite être réutilisés sans démonstration dans les exercices.*

24.1 Variables aléatoires discrètes

24.1.1 Définition

Définition 24.1 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire discrète** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute fonction $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

1. Son support $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, $[X = x]$ est un événement autrement dit $\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$

Définition 24.2 Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et X une variable aléatoire discrète,

- Si $X(\Omega)$ est fini, on peut noter $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, X est alors une **variable aléatoire finie** (cf Chapitre 14)
- Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, on peut noter $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, X est alors une **variable aléatoire discrète infinie**.

Remarque : Cette année, on admettra toujours que le point 2) de la Définition 24.1 est vérifié sans le démontrer.
De même, on admettra que si X et Y sont des variables aléatoires discrètes, alors, sous réserve de qu'elles sont bien définies, $\lambda X + \mu Y$, XY, X/Y, $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ en sont également.

Exemple 24.1 **Lancer de dés :** On lance un dé équilibré et on note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir 6.

24.1.2 Événements associés à une variable aléatoire

Ce qui va nous intéresser par la suite sera de calculer des probabilités relatives à X. Il faut donc construire des événements à partir de X. Par définition de la variable aléatoire X, on sait que pour tout $x \in X(\Omega)$, $[X = x]$ est un événement. On peut donc en calculer la probabilité. Comme dans le Chapitre 14, on utilisera les notations usuelles suivantes :

Définition 24.3 Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega\,,\, X(\omega) = x\}$$

$$[X < x] = \{\omega \in \Omega\,,\, X(\omega) < x\}, \qquad [X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega\,,\, X(\omega) \leqslant x\}$$

$$[X > x] = \{\omega \in \Omega\,,\, X(\omega) > x\}, \qquad [X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega\,,\, X(\omega) \geqslant x\}$$

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$ alors on note $[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega\,;\, x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}$.
Plus généralement, si I désigne une partie de $\mathbb{R}$, on note : $[X \in I] = \{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \in I\}$.

Exemple 24.2 Calculons $P([X = 1])$ et $P([X \leqslant 2])$ pour le lancer de dés de l'Exemple 24.1.

Proposition 24.1 Soit X une variable aléatoire discrète alors $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x]) = 1.$$

<u>*Remarque*</u> *:*

- *Lorsque* $X(\Omega)$ *est fini, la somme précédente est une somme finie. En effet, dans ce cas,* $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n\}$, *et donc* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P([X = x_k]) = 1$.
- *Lorsque* $X(\Omega)$ *est infini dénombrable, la somme précédente est la somme d'une série convergente. En effet, dans ce cas,* $X(\Omega) = \{x_k ; k \in \mathbb{N}\}$, *et donc* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P([X = x_k]) = 1$.
- *Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation* $P([X = x])$ *en* $P(X = x)$, *et de même pour les autres ensembles.*

Exemple 24.3 On reprend le lancer de dés de l'Exemple 24.1.
forme un système complet d'événements.

24.1.3 Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition 24.4 Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle **loi** de la variable aléatoire X, la donnée des $P(X = x)$ pour tout réel $x \in X(\Omega)$.

Méthode 24.1 **(Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète)**

- On donne l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.
- On calcule $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Exemple 24.4 On reprend le lancer de dés de l'Exemple 24.1.

Théorème 24.1 Considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.
Alors, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega) = \{x_k\,;\, k \in \mathbb{N}\}$ et :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad P(X = x_i) = p_i\,.$$

Exercice 24.1 Montrer que l'on définit bien la loi de probabilité d'une variable aléatoire X en posant :

$$X(\Omega) = \left\{3^k\,;\, k \in \mathbb{N}\right\} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = 3^k) = \frac{2}{3^{k+1}}\,.$$

On calcule donc la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^{k+1}} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{k}}.$$

On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique avec $q = \frac{1}{3} \in]-1;1[$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Donc, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{3^{n+1}}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$.

Définition 24.5 Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$F_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P(X \leqslant x) \end{array} \right.$$

Exemple 24.5 Reprenons l'exemple du tirage de jetons numérotés du Chapitre 14. On rappelle qu'on avait : $X(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$ et la loi de X était donnée par :

x	-1	1	3	Total
$P(X = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

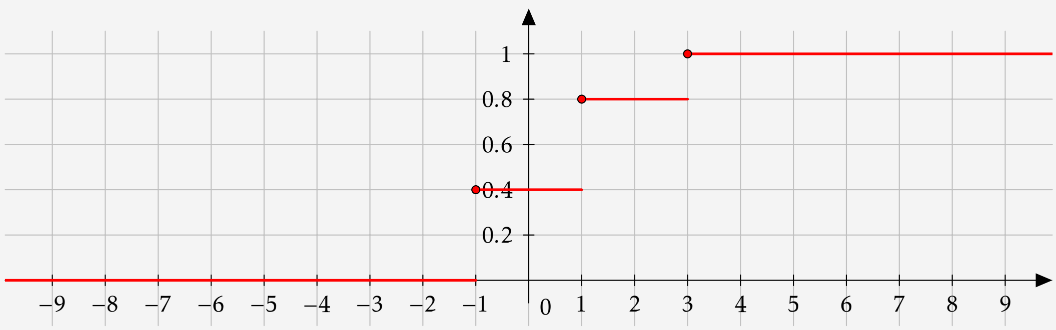
Calculons la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Si $1 \leqslant x < 3$, alors $F_X(x) = P(X = -1) + P(X = 1) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{5}$.

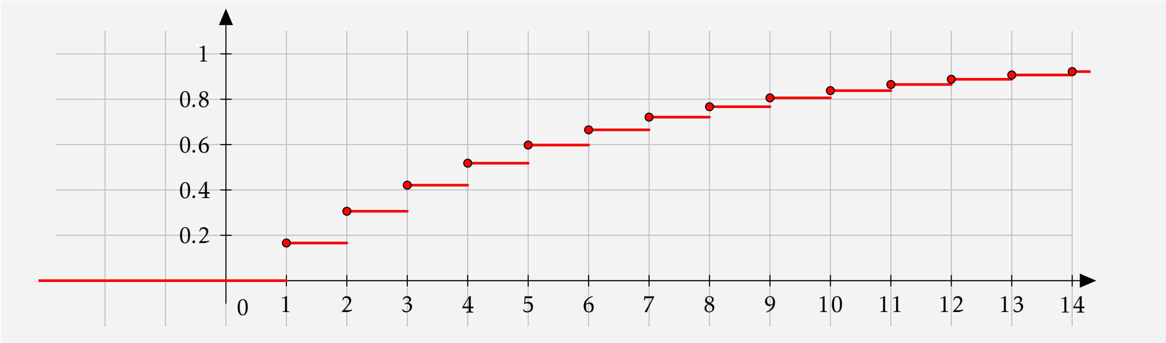
Si $x \geqslant 3$, alors $F_X(x) = 1$.

Ce que l'on peut résumer par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \dfrac{2}{5} & -1 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{4}{5} & 1 \leqslant x < 3 \\ 1 & x \geqslant 3 \end{cases}.$$



Exemple 24.6 On reprend l'expérience du lancer de dés de l'Exemple 24.1.



Lien entre loi et fonction de répartition

Proposition 24.2 (La fonction de répartition caractérise la loi) Soit X une variable aléatoire discrète,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{x_k \in X(\Omega), x_k \leqslant x} P(X = x_k),$$

et réciproquement, si $X(\Omega) = \{x_1, \dots x_n \dots\}$ où les x_i sont classés par ordre croissant,

$$P(X = x_1) = F_X(x_1) \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 2, \quad P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

Remarque : Dans le cas d'une variable aléatoire discrète finie X avec $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, l'égalité $F_X(x) = \sum_{x_k \in X(\Omega), x_k \leqslant x} P(X = x_k)$ s'écrit :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P(X = x_1) + \cdots + P(X = x_k) & x_k \leqslant x < x_{k+1} \\ 1 & x \geqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i \end{cases}.$$

En particulier, F_X est constante sur $[x_k ; x_{k+1}[$.

Démonstration.

□

<u>Remarque</u> : La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine parfaitement la loi de X. Autrement dit, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

Exercice 24.2 Un sac contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire successivement et avec remise deux boules : on note X_1 le numéro de la première boule et X_2 le numéro de la deuxième boule. On note Y le plus grand des deux nombres : $Y = \max(X_1, X_2)$. Déterminer la loi de Y.

Propriétés d'une fonction de répartition

Proposition 24.3 Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit F_X sa fonction de répartition. Alors :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_X(x) \in [0;1]$.
- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
- F_X est continue à droite en tout x de $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P(X > x) = 1 - F_X(x)$.
- Pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$, on a : $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Démonstration.

□

24.1.5 Transformée d'une variable aléatoire discrète

Définition 24.6 Soit X une variable aléatoire discrètes définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors, l'application Y définie sur Ω par $Y(\omega) = g(X(\omega))$ est une variable aléatoire discrète que l'on note $g(X)$.

Exemple 24.7 Soit X une variable aléatoire discrète de support $X(\Omega) = \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ et telle que

$$\forall n \in X(\Omega), \quad P(X = n) = \frac{1}{2n(n-1)}.$$

Déterminer la loi de $Y = |X|$.

24.2 Moments

24.2.1 Espérance

Définition 24.7 Soit X une variable aléatoire discrète, si la série de terme général $xP(X = x)$ est **absolument** convergente, alors on dit que X admet une **espérance**, notée $E(X)$, définie par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

En particulier si $X(\Omega) = \{x_k \,;\, k \in \mathbb{N}\}$, X admet une espérance si la série de terme général $x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente et on a, dans ce cas:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X = x_k).$$

Remarque : L'espérance s'interprète comme une moyenne.

Attention ! L'espérance d'une variable aléatoire discrète **finie** existe toujours alors que l'espérance d'une variable aléatoire discrète **infinie** existe sous réserve de l'absolue convergence de la série de terme général $x_n P(X = x_n)$.

Exemple 24.8 On reprend l'expérience du lancer de dés de l'Exemple 24.1.

Exemple 24.9 Soit X une variable aléatoire discrète définie par $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $P(X = i) = \dfrac{1}{i(i+1)}$. La variable aléatoire X admet-elle une espérance?

Proposition 24.4 (Linéarité) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant une espérance. Soit a et $b \in \mathbb{R}$. Alors, $X+Y$ et $aX+b$ admettent une espérance et :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \qquad \text{et} \qquad E(aX+b) = aE(X) + b.$$

Proposition 24.5 (Positivité) Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant une espérance. Si pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega) \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$.

Corollaire 24.1 (Croissance) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant une espérance. Si pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Théorème 24.2 (Existence d'une espérance par domination) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vérifiant $0 \leqslant |X| \leqslant Y$. Si Y admet une espérance alors X admet aussi une espérance et dans ce cas, on a :

$$|E(X)| \leqslant E(Y).$$

Théorème 24.3 (de transfert) Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $X(\Omega) = \{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors, la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance, si et seulement si, la série de terme général $g(x_n)P(X = x_n)$ est **absolument** convergente. Dans ce cas, on a alors :

$$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i).$$

Remarque : Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X.

Exercice 24.3 On lance une pièce de monnaie non truquée jusqu'à obtenir pour la première fois « Pile ». On note X le nombre de lancers effectués, et soit $Y = X^2$. Justifier que Y admet une espérance et la calculer.

24.2.2 Moments d'ordre r

Définition 24.8 Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que X admet un **moment d'ordre** r (avec $r \in \mathbb{N}^*$) lorsque $E(X^r)$ existe. On note alors $m_r(X) = E(X^r)$.

Remarque : Une variable aléatoire discrète infinie admet un moment d'ordre r lorsque la série de terme général $(x_n)^r P(X = x_n)$ est absolument convergente et dans ce cas :

$$m_r(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k)^r P(X = x_k) \qquad \textit{avec } X(\Omega) = \{x_k \,;\, k \in \mathbb{N}\}\,.$$

Exemple 24.10 On a montré dans l'Exercice 24.3 que la variable aléatoire X admettait un moment d'ordre 2.

Proposition 24.6 Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet des moments d'ordre s pour tout $s \leqslant r$.

Remarque : La contraposée de ce résultat est que si X n'admet pas de moment d'ordre r alors elle n'admet pas de moment d'ordre supérieur à r. En particulier, si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de moment d'ordre 2.

24.2.3 Variance

Définition 24.9 Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si X est une variable aléatoire discrète telle que la série de terme général $(x - E(X))^2 P(X = x)$ est absolument convergente alors on dit que X admet une **variance**, notée $V(X)$ et définie par :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x).$$

En particulier si $X(\Omega) = \{x_k\,;\, k \in \mathbb{N}\}$, X admet une variance si la série de terme général $(x_n - E(X))^2 P(X = x_n)$ est **absolument** convergente et on a, dans ce cas :

$$V(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k).$$

Remarque :

- *La série* $\sum_{n \geqslant 0} (x_n - E(X))^2 P(X = x_n)$ *étant à termes positifs, elle est absolument convergente, si et seulement si, elle est convergente.*
- *Sous réserve d'existence, on a* $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.
- *La variance, si elle existe, est un réel* ***positif ou nul****.*
- *La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.*

En pratique pour calculer la variance, on utilise le théorème suivant:

Théorème 24.4 (Formule de König-Huygens) Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X admet une variance, si et seulement si, X admet un moment d'ordre 2, et dans ce cas :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

Démonstration. L'existence de tous les termes est garantie par l'existence d'un moment d'ordre 2. Le calcul se fait ensuite exactement comme dans le cas des variables aléatoires finies. □

Exemple 24.11 On lance une pièce de monnaie non truquée jusqu'à obtenir pour la première fois « Pile ». On note X le nombre de lancers effectués. Justifier que X admet une variance et la calculer.

Méthode 24.2 **(Répondre à la question « X admet-elle une variance? Si oui, la calculer. »)**

- Si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.
- Si X admet une espérance, il faut regarder si $E(X^2)$ existe (grâce au théorème de transfert).
  - ⋆ Si non, alors X n'admet pas de variance.
  - ⋆ Si oui, alors on utilise, pour la calculer, la formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.,$$

Exercice 24.4 On reprend l'expérience du lancer de dés de l'Exemple 24.1.

Proposition 24.7 Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2 et soient a et b dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

En particulier,

$$V(X+b) = V(X).$$

Attention ! Contrairement à l'espérance, la variance n'est pas linéaire.

Théorème 24.5 **(Variable aléatoire de variance nulle)** Si X est une variable aléatoire discrète de variance nulle, alors il existe un réel a pour lequel $P(X=a)=1$, et on dit que X est une variable quasi-certaine.

Démonstration.

□

Définition 24.10 Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. On appelle **écart-type** de X, et on note $\sigma(X)$ le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Définition 24.11 Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- On dit que X est **centrée** lorsque X admet une espérance et que $E(X) = 0$.
- On dit que X est **réduite** lorsque X admet une variance et que $V(X) = 1$.

Proposition 24.8 Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X admet une espérance. Alors, $Y = X - E(X)$ est une variable aléatoire centrée.

Démonstration. Identique au cas des variables aléatoires finies. □

Proposition 24.9 Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X admet une variance, et que cette variance est non nulle. Alors, la variable aléatoire

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)},$$

est une variable centrée réduite.
On l'appelle la **variable aléatoire centrée réduite associée à** X.

Démonstration. Identique au cas des variables aléatoires finies. □

24.3 Lois discrètes usuelles

24.3.1 Rappels et compléments sur les lois finies

Loi certaine

Proposition 24.10 Soit X une variable aléatoire suivant une loi certaine telle que $X(\Omega) = \{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$. La fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant a \end{cases}$$

Démonstration.

□

Loi de Bernoulli

Proposition 24.11 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0, 1]$. La fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1-p & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Démonstration.

□

24.3.2 Lois discrètes infinies

Loi géométrique

Définition 24.12 Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique de paramètre** $p \in]0;1[$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On note : $\quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemple 24.12 On lance indéfiniment un dé non truqué. On note X le rang du lancer qui donne le nombre 1 pour la première fois.

Remarque :

- *Cet exemple est typique de la loi géométrique dont le modèle est le suivant :*
  - ⋆ *On réalise une succession d'épreuves indépendantes de Bernoulli de même paramètre p.*
  - ⋆ *On note X le rang de l'épreuve qui a amené le premier succès. X est considéré comme « le temps d'attente du premier succès ».*
- *On a bien* $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)=1$.

Proposition 24.12 Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Alors X admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X)=\frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X)=\frac{1-p}{p^2}.$$

Démonstration. C'est exactement le même type de calculs que l'on a menés pour l'expérience du lancer de dés de l'Exemple 24.1 avec $p=\frac{1}{6}$. □

Méthode 24.3 (Modélisation et rédaction pour utiliser la loi géométrique)

Modélisation On considère une expérience consistant en une suite infinie d'épreuves mutuellement indépendantes, chaque épreuve ayant deux issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1-p$.
La variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès suit la loi géométrique de paramètre p.

Rédaction On écrira « On appelle succès l'événement ...de probabilité p. Alors la variable aléatoire X qui compte le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès (ou égale au rang du premier succès) en répétant de manière identique et indépendante l'expérience de Bernoulli associée suit la loi géométrique de paramètre p. »

Exemple 24.13 On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant 7 boules noires et 3 boules rouges et on note Y le rang de la première boule rouge. Reconnaître la loi de Y puis déterminer l'espérance et la variance de Y.

Loi de Poisson

Définition 24.13 Soit λ un réel strictement positif. Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On note : $\quad X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque :

- *La loi de Poisson est parfois appelée* **loi des événements rares**. *Elle sert par exemple à modéliser :*
  - ⋆ *le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps donné ;*
  - ⋆ *le nombre de véhicules franchissant un poste de péage dans un intervalle de temps donné ;*
  - ⋆ *le nombre de clients se présentant dans un magasin dans un intervalle de temps donné ;*
  - ⋆ *le nombre de fautes de frappe dans les pages d'un cours de maths , etc.*
- *On a bien* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

Proposition 24.13 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors X admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad V(X) = \lambda.$$

Démonstration.

□

Méthode 24.4 (Modélisation et rédaction pour utiliser la loi de Poisson)

Modélisation et rédaction La loi de Poisson sert, la plupart du temps à modéliser des phénomènes « rares ».
Il n'existe pas vraiment de cas typique ou de rédaction modèle pour cette loi. Elle sera toujours introduite par l'énoncé de l'exercice.

Exercice 24.5 Chaque jour, un vendeur d'un journal local a X acheteurs. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 8$. Le bénéfice de la vente d'un journal est de 2 euros.

1. Quel est le bénéfice moyen ?

2. Quelle est la probabilité que le vendeur gagne 6 euros ? 18 euros ?

24.3.3 Tableau récapitulatif des lois usuelles

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
Certaine	$\{a\}$	$P(X=a)=1$	a	0
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$	$[\![1;n]\!]$	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\{0;1\}$	$P(X=0)=1-p$ et $P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$[\![0;n]\!]$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Poisson : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$	λ	λ

24.4 Complément : indépendance

Définition 24.14 Soient $X_1,\ldots,X_n$ n variables aléatoires de support respectif $X_1(\Omega),\ldots,X_n(\Omega)$. Les variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes (mutuellement) lorsque pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\ldots X_n(\Omega)$ on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i=x_i]\right)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i).$$

<u>Remarque</u> : Cette définition est à mettre en parallèle de la suivante vue au Chapitre 21.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$.
*On dit que les événements $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$ sont **mutuellement indépendants** si:*

$$\text{pour tout partie finie } I\subseteq\mathbb{N}^*\qquad P\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}P(A_i).$$

Exemple 24.14 Lançons une infinité de fois une pièce donnant pile avec une probabilité $p\in]0;1[$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire X_n valant 1 si la pièce donne Pile et 0 sinon. On peut considérer que les variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes. Ainsi la probabilité que Pile apparaisse pour la première fois au n-ème lancer est :