23. Intégrales généralisées

Il est plus facile d'apprendre les mathématiques que d'apprendre à s'en passer.

Henri Cartan

Dans le Chapitre 15, nous avons défini le concept d'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle dont les deux bornes sont des nombres finis. Dans ce chapitre, nous considérerons des intégrales sur un intervalle pour lequel au moins une des bornes est infinie. Pour bien comprendre ce qui suit, on peut faire le parallèle entre les sommes finies, qui ont un sens dès que le terme général est bien défini, et les séries, qui peuvent être convergentes ou divergentes même si le terme général est bien défini.
Les intégrales généralisées seront notamment un outil qui permettra d'introduire rigoureusement les variables aléatoires à densité que vous étudierez en deuxième année.

23.1 Intégration sur un intervalle semi-ouvert

23.1.1 Convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b[$

Définition 23.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b[$ où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite impropre en b. De plus, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **converge** si $\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque : Lorsque l'intégrale ne converge pas, on dit qu'elle diverge.
Etudier la nature ou l'existence d'une intégrale impropre consiste à étudier sa convergence ou sa divergence.

Exemple 23.1

- Etudier la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur si elle converge.

- Etudier la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ et calculer sa valeur si elle converge.

- Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^{1} \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur si elle converge.

- Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-t^4}{1-t}\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur si elle converge.

23.1.2 Intégrales de référence

Proposition 23.1 (Intégrale de Riemann) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. **A connaître**

□

<u>Remarque</u> : Les résultats de convergence restent vrais pour les intégrales $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *ou* $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *si* $x \in]0,+\infty[$.

Corollaire 23.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a < b$ des réels.
Les intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\mathrm{d}t$ convergent si seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration.

□

Proposition 23.2 L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

Démonstration. **A connaître**

□

23.1.3 Propriétés

Proposition 23.3 (Linéarité) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent, alors l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))\mathrm{d}t$ converge et:

$$\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Attention !

1. Les deux intégrales de droite doivent converger pour pouvoir écrire l'égalité!

2. Il est possible que l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))\mathrm{d}t$ converge alors que les deux intégrales : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ divergent. **On ne peut donc pas scinder en deux une intégrale impropre sans avoir vérifié au préalable que les deux intégrales obtenues convergeaient.**

Démonstration.

$\square$

Exercice 23.1 1. Vérifier que, pour tout $t \in [1;+\infty[$, $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$ converge et déterminer sa valeur.

3. Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ convergent-elles?

   A-t-on $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$?

Proposition 23.4 **(Relation de Chasles)** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;c[$ avec $-\infty < a < c \leqslant +\infty$ et soit $b \in [a;c[$. L'intégrale $\int_b^c f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ converge et on a alors :

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Ce résultat s'obtient par passage à la limite après application de la relation de Chasles sur un segment où f est continue. □

Proposition 23.5 **(Positivité de l'intégrale)** Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a;+b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge. Alors :

- $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- si f n'est pas identiquement nulle sur $[a;b[$ alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$.
- si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ alors f est identiquement nulle sur $[a;b[$.

Démonstration. Ce résultat s'obtient par passage à la limite après application de la positivité de l'intégrale sur un segment où f est continue. □

Proposition 23.6 (Croissance de l'intégrale) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose que pour tout t dans $[a,b[$, on a $f(t) \leqslant g(t)$ et que les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent. Alors:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Ce résultat s'obtient par passage à la limite après application de la croissance de l'intégrale sur un segment où f et g sont continues. □

23.2 Techniques de calculs

23.2.1 Intégration par parties

Méthode 23.1 On ne procède pas à une intégration par parties dans une intégrale généralisée: on se ramène à une intégrale définie sur un segment et on passe ensuite à la limite.

Exercice 23.2 Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

23.2.2 Changement de variables

Théorème 23.1 Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ et φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ croissante de $[\alpha,\beta[$ sur $[a,b[$ avec $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$. Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. En cas de convergence, on a:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

<u>*Remarque*</u> *:*

- *Si φ décroît, alors, en cas de convergence on a :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

- *Conformément au programme, si le changement de variable n'est pas affine (i.e. de la forme $\varphi(t) = at + b$ où $a \neq 0$), il doit être donné par l'énoncé.*

Exercice 23.3 Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$ converge et donner sa valeur.
On pourra effectuer le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$.

23.3 Théorèmes de convergence

23.3.1 Cas des fonctions positives

Proposition 23.7 **(Condition nécessaire et suffisante de convergence)** Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

Démonstration.

□

Exercice 23.4 Etudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

23.3.2 Comparaison de fonctions positives

Proposition 23.8 (Cas où $f \leqslant g$, f et g positives au voisinage de b) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose qu'au voisinage de b, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge également.
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ diverge vers $+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ diverge également.

Attention ! Attention, la convergence ne signifie pas nécessairement que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 23.2 Etudions le convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\mathrm{d}t$.

Exemple 23.3 Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

Proposition 23.9 (Cas où $f \sim g$, f et g positives au voisinage de b) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose qu'au voisinage de b, g est positive et que $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 23.4 Etudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{(1+t^2)}}\mathrm{d}t$.

Proposition 23.10 (Cas où $f(x) \underset{b}{=} o(g(x))$, g positive au voisinage de b) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose qu'au voisinage de b, g est positive, que $f(x) \underset{b}{=} o(g(x))$ et que $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Attention ! Les négligeabilités ne permettent jamais de montrer la divergence d'une intégrale, elles ne peuvent être utilisées que pour montrer une convergence.

Exemple 23.5 Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u$.

Remarque : Comme pour les séries, les résultats énoncés dans cette partie s'adaptent sans difficulté aux fonctions négatives. C'est pour cela, qu'on parle parfois des théorèmes de comparaison des intégrales pour les fonctions de signe constant.

23.3.3 Convergence absolue

Définition 23.2 (Convergence absolue) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 23.6 L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Théorème 23.2 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration.

□

Exemple 23.7 L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

Exemple 23.8 Soit $n \in \mathbb{N}$, étudier la convergence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \exp(-t)(\cos(t))^n \mathrm{d}t.$$

Attention ! La réciproque du Théorème 23.2 est fausse (voir Exemple 23.10).

Exercice 23.5 Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ converge.
On effectuera pour cela le changement de variables $u = \frac{1}{t}$.

23.4 Intégrales sur un intervalle quelconque

Définition 23.3 Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **converge** lorsque qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_c^x f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_x^c f(t)\mathrm{d}t$ existent et sont finies. On pose alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}\int_x^c f(t)\mathrm{d}t + \lim_{x\to b}\int_c^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **diverge**.

Remarque : D'après la relation de Chasles, la valeur de c n'a aucune incidence sur la convergence ou la valeur de l'intégrale. Si cela converge pour un c, cela converge pour tous.

Exemple 23.9 Étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 23.6 Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de $\int_{0}^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)\mathrm{d}t$ selon les valeurs de x.

Exemple 23.10 Etudions la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$.

Proposition 23.11 Si $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge avec f paire ou impaire alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et on a :

- Si f est paire, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.
- Si f est impaire, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Proposition 23.12 **(Inégalité triangulaire)** Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ soit absolument convergente. Alors:

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$