# 23. Intégrales généralisées



Il est plus facile d'apprendre les mathématiques que d'apprendre à s'en passer.

*Henri Cartan*

*Dans le Chapitre 15, nous avons défini le concept d'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle dont les deux bornes sont des nombres finis. Dans ce chapitre, nous considérerons des intégrales sur un intervalle pour lequel au moins une des bornes est infinie. Pour bien comprendre ce qui suit, on peut faire le parallèle entre les sommes finies, qui ont un sens dès que le terme général est bien défini, et les séries, qui peuvent être convergentes ou divergentes même si le terme général est bien défini.*
*Les intégrales généralisées seront notamment un outil qui permettra d'introduire rigoureusement les variables aléatoires à densité que vous étudierez en deuxième année.*

## 23.1 Intégration sur un intervalle semi-ouvert

### 23.1.1 Convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b[$

**Définition 23.1** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a; b[$ où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite impropre en $b$. De plus, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **converge** si $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

*Remarque : Lorsque l'intégrale ne converge pas, on dit qu'elle diverge.*
*Etudier la nature ou l'existence d'une intégrale impropre consiste à étudier sa convergence ou sa divergence.*

**Exemple 23.1** • Etudier la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur si elle converge.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[2,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Pour tout $x \in [2;+\infty[$, on a :

$$\int_2^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

Donc, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

• Etudier la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ et calculer sa valeur si elle converge.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Pour tout $x \in [1;+\infty[$, on a :

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln(x)\Big]_1^x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x)$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

Donc, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge.

• Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur si elle converge.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$, donc l'intégrale est impropre en 1.
Soit $x \in [0,1[$,

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = [-\ln(|1-t|)]_0^x = -\ln(1-x)$$

Or $\lim_{x\to1} -\ln(1-x) = +\infty$. Donc l'intégrale diverge.

- Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^4}{1-t}\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur si elle converge.

  La fonction $t \mapsto \dfrac{1-t^4}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$, donc l'intégrale est impropre en 1. Soit $x \in [0,1[$,
  $$\int_0^x \frac{1-t^4}{1-t}\mathrm{d}t = \int_0^x \left(1+t+t^2+t^3\right)dt$$
  En effet,
  $$1-t^4 = (1-t^2)(1+t^2) = (1-t)(1+t)(1+t^2) = (1-t)(1+t+t^2+t^3).$$
  On a alors :
  $$\int_0^x \frac{1-t^4}{1-t}\mathrm{d}t = \left[t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\right]_0^x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}.$$
  Or
  $$\lim_{x\to 1} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$
  Donc l'intégrale converge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^4}{1-t}dt = \frac{25}{12}$.

  **Remarque :** $t \mapsto \frac{1-t^4}{1-t}$ est prolongeable par continuité en 1 , ce qui assure la convergence ici. On parle dans ce cas d'intégrale faussement impropre.

### 23.1.2 Intégrales de référence

**Proposition 23.1** **(Intégrale de Riemann)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

*Démonstration.* **A connaître**

1. Soit $x \geqslant 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
   - Si $\alpha = 1$, alors $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^x = \ln(x)$.

     Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, on en déduit la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.
   - Si $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, alors $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$.

★ Si $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$, d'où la convergence de l'intégrale et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}$.

★ Si $\alpha < 1$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = +\infty$, d'où la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,1]$ donc l'intégrale est impropre en 0. Soit $0 < x \leqslant 1$.

- Si $\alpha = 1$, alors $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_x^1 = -\ln(x)$.

  Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} -\ln(x) = +\infty$, on en déduit la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, alors $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1-x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

  ★ Si $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = +\infty$, d'où la divergence de l'intégrale.

  ★ Si $\alpha < 1$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$, d'où la convergence de l'intégrale et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$

□

*Remarque : Les résultats de convergence restent vrais pour les intégrales* $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *ou* $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *si* $x \in ]0,+\infty[$.

**Corollaire 23.1** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a < b$ des réels.
Les intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\mathrm{d}t$ convergent si seulement si $\alpha < 1$.

*Démonstration.* On montre le résultat pour la première intégrale, la deuxième se traite de la même façon. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ est continue sur $[a,b[$, donc l'intégrale est impropre en $b$. Soit $x \in [a,b[$, on utilise le changement de variables affine $u = b-t$ :

$$\int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha}dt = \int_{b-a}^{b-x} \frac{1}{u^\alpha}(-du) = \int_{b-x}^{b-a} \frac{1}{u^\alpha}du$$

La convergence ou divergence de l'intégrale lorsque $x$ tend vers $b$ est alors assurée par le résultat précédent sur les intégrales de Riemann impropres en 0. □

**Proposition 23.2** L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

*Démonstration.* **A connaître** La fonction $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $x \geqslant 0$.

- Si $\lambda = 0$, alors $\displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t} dt = \int_0^x 1 dt = [t]_0^x = x$.

  Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, on en déduit la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1 dt$.

- Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t} dt = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$.

  ⋆ Si $\lambda > 0$ alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$, d'où la convergence de l'intégrale et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$.

  ⋆ Si $\lambda < 0$ alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = -\infty$, d'où la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$.

□

### 23.1.3 Propriétés

**Proposition 23.3** **(Linéarité)** Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t) dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt$ converge et:

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

**Attention !**

1. Les deux intégrales de droite doivent converger pour pouvoir écrire l'égalité!

2. Il est possible que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt$ converge alors que les deux intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(t) dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t) dt$ divergent. **On ne peut donc pas scinder en deux une intégrale impropre sans avoir vérifié au préalable que les deux intégrales obtenues convergeaient.**

*Démonstration.* Soit $x \in [a, b[$. Les fonctions $f$ et $g$ sont continues sur $[a, x]$ et la linéarité de l'intégrale sur un segment donne:

$$\int_a^x (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^x f(t) dt + \int_a^x g(t) dt$$

Comme on a supposé que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent, le membre de droite de cette égalité admet une limite finie quand $x$ tend vers $b$. L'intégrale du membre de gauche converge donc et un passage à la limite dans l'égalité donne:

$$\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

□

**Exercice 23.1** 1. Vérifier que, pour tout $t \in [1;+\infty[$, $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.

En mettant au même dénominateur, on obtient pour $t \in [1;+\infty[$,

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{t+1-t}{t(t+1)} = \frac{1}{t(t+1)}.$$

2. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$ converge et déterminer sa valeur.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(t+1)}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Commençons par trouver une primitive de la fonction $f$ définie sur $[1;+\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Une primitive de $f$ est donnée par

$$F(t) = \ln(t) - \ln(t+1).$$

Soit $x \in [1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t &= [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^x \\ &= \ln(x) - \ln(x+1) - \ln(1) + \ln(2) \\ &= \ln(2) - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(2) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et $\lim_{m\to 1} \ln(m) = 0$ donc par composée de limites

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(2) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(2).$$

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = \ln(2)$.

3. Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ convergent-elles?

A-t-on $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$?

Soit $x \in [1;+\infty[$, on a :

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln t]_1^x = \ln(x) \quad \text{et} \quad \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = [\ln(t+1)]_1^x = \ln(x+1) - \ln(2).$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - \ln(2) = +\infty$ donc les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ divergent.

L'égalité $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ n'est donc évidemment pas vraie.

**Proposition 23.4 (Relation de Chasles)** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;c[$ avec $-\infty < a < c \leqslant +\infty$ et soit $b \in [a;c[$. L'intégrale $\int_b^c f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ converge et on a alors :

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t.$$

*Démonstration.* Ce résultat s'obtient par passage à la limite après application de la relation de Chasles sur un segment où f est continue. □

**Proposition 23.5 (Positivité de l'intégrale)** Soit $f$ une fonction continue et **positive** sur $[a;+b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge. Alors :

- $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- si $f$ n'est pas identiquement nulle sur $[a;b[$ alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$.
- si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ alors $f$ est identiquement nulle sur $[a;b[$.

*Démonstration.* Ce résultat s'obtient par passage à la limite après application de la positivité de l'intégrale sur un segment où f est continue. □

**Proposition 23.6 (Croissance de l'intégrale)** Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose que pour tout $t$ dans $[a,b[$, on a $f(t) \leqslant g(t)$ et que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent. Alors:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

*Démonstration.* Ce résultat s'obtient par passage à la limite après application de la croissance de l'intégrale sur un segment où f et g sont continues. □

## 23.2 Techniques de calculs

### 23.2.1 Intégration par parties

**Méthode 23.1** On ne procède pas à une intégration par parties dans une intégrale généralisée: on se ramène à une intégrale définie sur un segment et on passe ensuite à la limite.

**Exercice 23.2** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

On pose la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t\mathrm{e}^{-t}$.Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Soit $x \in [0;+\infty[$, on souhaite calculer $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, pour cela effectuons une intégration par parties.

Posons $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ v(t) = t \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$.

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ donc par intégration par parties:

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
= \left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x - \int_0^x -\mathrm{e}^{-t} \times 1\mathrm{d}t = -x\mathrm{e}^{-x} + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
= -x\mathrm{e}^{-x} + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1 \\
= \mathrm{e}^{-x}(-x-1) + 1.
\end{aligned}$$

Or par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}(-x-1) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}(-x-1) + 1 = 1$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1.$$

### 23.2.2 Changement de variables

**Théorème 23.1** Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ et $\varphi$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ croissante de $[\alpha,\beta[$ sur $[a,b[$ avec $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$. Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. En cas de convergence, on a:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

*Remarque :*

- *Si $\varphi$ décroît, alors, en cas de convergence on a :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

- *Conformément au programme, si le changement de variable n'est pas affine (i.e. de la forme $\varphi(t) = at + b$ où $a \neq 0$), il doit être donné par l'énoncé.*

**Exercice 23.3** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$ converge et donner sa valeur.
*On pourra effectuer le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$.*

On pose la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car $1+\mathrm{e}^x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.

- La fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est une bijection croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.
- Comme $t = \mathrm{e}^x$, on a $x = \ln(t)$ et ainsi $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

On sait alors que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t$ sont de même nature et égales en cas de convergence.
Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t$ converge. Soit $x \in [0;+\infty[$, on souhaite calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t$. Pour cela remarquons que :

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Une primitive de la fonction $g(t) = \frac{1}{t(t+1)}$ est donc donnée par

$$G(t) = \ln(t) - \ln(t+1) = -\ln\left(\frac{t+1}{t}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{t}\right).$$

Ainsi :

$$\int_1^x \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t = \left[-\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_1^x = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln(2).$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par composée et somme de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln(2) = \ln(2).$$

On peut donc conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = \ln(2).$$

## 23.3 Théorèmes de convergence

### 23.3.1 Cas des fonctions positives

**Proposition 23.7 (Condition nécessaire et suffisante de convergence)** Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

*Démonstration.* La fonction $f$ est continue sur $[a,b[$ , donc $g : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est bien définie sur $[a,b[$. Comme c'est la primitive de $f$ qui s'annule en $a$, $g$ est dérivable sur $[a,b[$ et

$$\forall x \in [a,b[, \quad g'(x) = f(x) \geqslant 0.$$

Donc $g$ est croissante sur $[a,b]$.
Le théorème de la limite monotone donne alors : $g$ admet une limite finie en $b$ si et seulement si $g$ est majorée sur $[a,b[$. Ce qui nous donne exactement le résultat souhaité. □

**Exercice 23.4** Etudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\exp(-t)}{t^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. D'après le résultat précédent, il nous suffit de montrer que la fonction $x \mapsto \int_1^x \dfrac{\exp(-t)}{t^2}dt$ est majorée sur $[1,+\infty[$.

Soit $x \in [1,+\infty[$, majorons $\displaystyle\int_1^x \frac{\exp(-t)}{t^2}\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \exp(-t)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $\forall t \in [1,x]$, $\exp(-t) \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. De plus, $t^2 > 0$ sur $[1,x]$ donc $\forall t \in [1,x]$, $\frac{\exp(-t)}{t^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t^2}$. Ainsi la croissance de l'intégrale (avec $1 \leqslant x$ ) donne

$$\int_1^x \frac{\exp(-t)}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{e^{-1}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

La positivité de la fonction intégrée et la convergence de l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ assurent que:

$$\int_1^x \frac{e^{-1}}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-1}}{t^2}dt = e^{-1}.$$

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\exp(-t)}{t^2}dt$ est bornée donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t^2}dt$ converge.

### 23.3.2 Comparaison de fonctions positives

**Proposition 23.8** **(Cas où $f \leqslant g$, $f$ et $g$ positives au voisinage de $b$)** Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose qu'au voisinage de $b$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge également.
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ diverge vers $+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ diverge également.

**Attention !** Attention, la convergence ne signifie pas nécessairement que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

**Exemple 23.2** Etudions le convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3+1}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $t \in [1,+\infty[$ alors

$$0 \leqslant \frac{1}{t^3+1} \leqslant \frac{1}{t^3}.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente car $\alpha = 3 > 1$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\mathrm{d}t$ converge.

**Exemple 23.3** Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$, l'intégrale est donc impropre en 0.
La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$ est positive au voisinage de 0, on a donc au voisinage de 0 :

$$0 \leqslant \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ est convergente car c'est une intégrale de Riemann ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$).
Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ est également convergente.

**Proposition 23.9** **(Cas où $f \sim g$, $f$ et $g$ positives au voisinage de $b$)** Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose qu'au voisinage de $b$, $g$ est positive et que $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

**Exemple 23.4** Etudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{(1+t^2)}}\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{(1+t^2)}}$ est continue sur $[1,+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Cherchons un équivalent de la fonction à intégrer, qui est positive sur $[1,+\infty[$. On a :

$$\sqrt{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{t^2} \quad \text{donc} \quad t\sqrt{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} t^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{t\sqrt{(1+t^2)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{(1+t^2)}}\mathrm{d}t$ converge également.

**Proposition 23.10** **(Cas où $f(x) \underset{b}{=} o(g(x))$, $g$ positive au voisinage de $b$)** Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose qu'au voisinage de $b$, $g$ est positive, que $f(x) \underset{b}{=} o(g(x))$ et que $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

**Attention !** Les négligeabilités ne permettent jamais de montrer la divergence d'une intégrale, elles ne peuvent être utilisées que pour montrer une convergence.

**Exemple 23.5** Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u$.

La fonction $u \mapsto \exp\left(-u^2\right)$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Les résultats de croissance comparée donnent $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} u^2\exp\left(-u^2\right)=0$ donc

$$\exp\left(-u^2\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

Or la fonction $u \to \frac{1}{u^2}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$) donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u$ converge également.
**Remarque** : changer la borne non-impropre de l'intégrale au moment de l'application du théorème ne pose pas de problème. En effet, le théorème donne ici la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u$ mais comme $\displaystyle\int_0^{1} \exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u$ converge (c'est une intégrale de fonction continue sur un segment), la relation de Chasles nous permet ensuite de conclure.

*Remarque : Comme pour les séries, les résultats énoncés dans cette partie s'adaptent sans difficulté aux fonctions négatives. C'est pour cela, qu'on parle parfois des théorèmes de comparaison des intégrales pour les fonctions de signe constant.*

### 23.3.3 Convergence absolue

**Définition 23.2 (Convergence absolue)** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge.

**Exemple 23.6** L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

La fonction $x \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. On a pour $t \in [1,+\infty[$,

$$\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right|\mathrm{d}t$ est convergente et donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

**Théorème 23.2** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

*Démonstration.* La preuve repose sur l'écriture de toute fonction continue sur un intervalle comme la différence de deux fonctions continues et positives sur ce même intervalle. On a ici pour tout $x \in [a,b[$,

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad \text{avec } f_+(x) = \max(f(x),0) \quad \text{et} \quad f_-(x) = \max(-f(x),0).$$

La continuité de $f_+$ et de $f_-$ vient de leur écriture sous la forme suivante :

$$f_+(x) = \frac{f(x)+|f(x)|}{2} \quad \text{et} \quad f_-(x) = \frac{-f(x)+|f(x)|}{2}.$$

La valeur absolue étant continue sur $\mathbb{R}$, $f_+$ et $f$ sont continues sur $[a,b[$ et elles sont de plus positives par construction.

Par hypothèse, l'intégrale $f$ converge absolument donc $\int_a^b |f(t)|$ converge. On a de plus les inégalités :

$$0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|$$

les intégrales $\int_a^b f_+(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f_-(t)\mathrm{d}t$ sont donc convergentes. Par linéarité des intégrales convergentes, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge avec:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f_+(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f_-(t)\mathrm{d}t.$$

□

**Exemple 23.7** L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

**Exemple 23.8** Soit $n \in \mathbb{N}$, étudier la convergence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \exp(-t)(\cos(t))^n \mathrm{d}t.$$

La fonction $t \longrightarrow \exp(-t)(\cos(t))^n$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. On a $\forall t \in [0,+\infty[$:

$$0 \leqslant |\exp(-t)(\cos(t))^n| = |\exp(-t)||(\cos(t))|^n \leqslant \exp(-t)$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-t)\mathrm{d}t$ est convergente. Ainsi $I_n$ converge absolument donc $I_n$ converge.

**Attention !** La réciproque du Théorème 23.2 est fausse (voir Exemple 23.10).

**Exercice 23.5** Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ converge.
*On effectuera pour cela le changement de variables* $u = \frac{1}{t}$.

- La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$ est une bijection décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$.
- Comme $u = \frac{1}{t}$ c'est-à-dire $t = \frac{1}{u}$ alors on a $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$.

On sait alors que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}\mathrm{d}u$ ont même nature.

$$\forall u \in [1,+\infty[, \qquad \left|\frac{\sin(u)}{u^2}\right| \leqslant \frac{1}{u^2}$$

et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$ converge car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.
D' après le critère de convergence par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}\mathrm{d}u$ est absolument convergente donc convergente. Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ converge.

## 23.4 Intégrales sur un intervalle quelconque

**Définition 23.3** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **converge** lorsque qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_c^x f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_x^c f(t)\mathrm{d}t$ existent et sont finies. On pose alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}\int_x^c f(t)\mathrm{d}t + \lim_{x\to b}\int_c^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **diverge**.

*Remarque : D'après la relation de Chasles, la valeur de $c$ n'a aucune incidence sur la convergence ou la valeur de l'intégrale. Si cela converge pour un $c$, cela converge pour tous.*

**Exemple 23.9** Étudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}t$.

La fonction $t \longrightarrow t$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale existe et est impropre en $+\infty$ et en $-\infty$. Or $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t\mathrm{d}t$ diverge (intégrale de Riemann avec $\alpha = -1$ ). Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}t$ diverge également.

**Remarque :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} t\mathrm{d}t = 0$, mais cela ne permet pas de conclure, il faut étudier séparément les convergences en $+\infty$ et en $-\infty$.

**Exercice 23.6** Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)\mathrm{d}t$ selon les valeurs de $x$.

La fonction $t \mapsto t^{x-1}\exp(-t)$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.

**Etude de** $\displaystyle\int_{0}^{1} t^{x-1}\exp(-t)\mathrm{d}t$. On a $\lim\limits_{t\to 0} \mathrm{e}^{-t} = 1$ et donc :

$$t^{x-1}\exp(-t) \underset{0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

Ces fonctions sont positives et continues au voisinage de $0_+$, donc on peut appliquer le critère d'équivalence et les intégrales $\displaystyle\int_{0}^{1} t^{x-1}\exp(-t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{t^{1-x}}\mathrm{d}t$ ont la même nature. Or par critère de convergence des intégrales de Riemann, $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{t^{1-x}}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1-x<1$, et donc si et seulement si $x>0$.

En conclusion, $\displaystyle\int_{0}^{1} t^{x-1}\exp(-t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>0$.

**Étude de** $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)\mathrm{d}t$. Par croissances comparées, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 t^{x-1} e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0 \quad \text{et donc} \quad t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Ces fonctions sont positives et continues au voisinage de $+\infty$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente. Donc par critère de négligeabilité, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente (et ce quel que soit $x \in \mathbb{R}$ ).

**Conclusion :** l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les deux intégrales étudiées convergent, c'est-à-dire si et seulement si $x>0$.

**Exemple 23.10** Etudions la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$. On étudie donc la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

⋆ **Etude de** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$. On a : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Donc $\displaystyle\frac{\sin(t)}{t} \underset{0}{\sim} 1$, or $1 \geqslant 0$ donc les deux fonctions sont positives au voisinage de 0. De plus, $\displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge également.

⋆ **Etude de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$. La fonction intégrée n'est pas positive au voisinage de $+\infty$, on commence donc par vérifier si l'intégrale converge absolument. On a :

$$\forall t \geqslant 1, \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \leqslant \frac{1}{t},$$

mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de conclure. L'intégrale n'est en fait pas absolument convergente (même si on ne l'a pas montré).

Essayons une autre méthode. Soit $x > 1$ et effectuons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Posons $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v'(t) = -\cos(t) \end{cases}$.

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ donc par intégration par parties:

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

Or

$$\forall x > 1, \left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x},$$

donc par théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$. De plus, $\forall t \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2},$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge absolument (ce qui garantit sa convergence).

Ainsi le membre de droite de l'égalité précédente admet une limite finie en $+\infty$, ce qui signifie que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

⋆ **Conclusion** : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

**Proposition 23.11** Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge avec $f$ paire ou impaire alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et on a :

- Si $f$ est paire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.
- Si $f$ est impaire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

**Proposition 23.12** **(Inégalité triangulaire)** Soit $f$ une fonction continue sur $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ soit absolument convergente. Alors:

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$