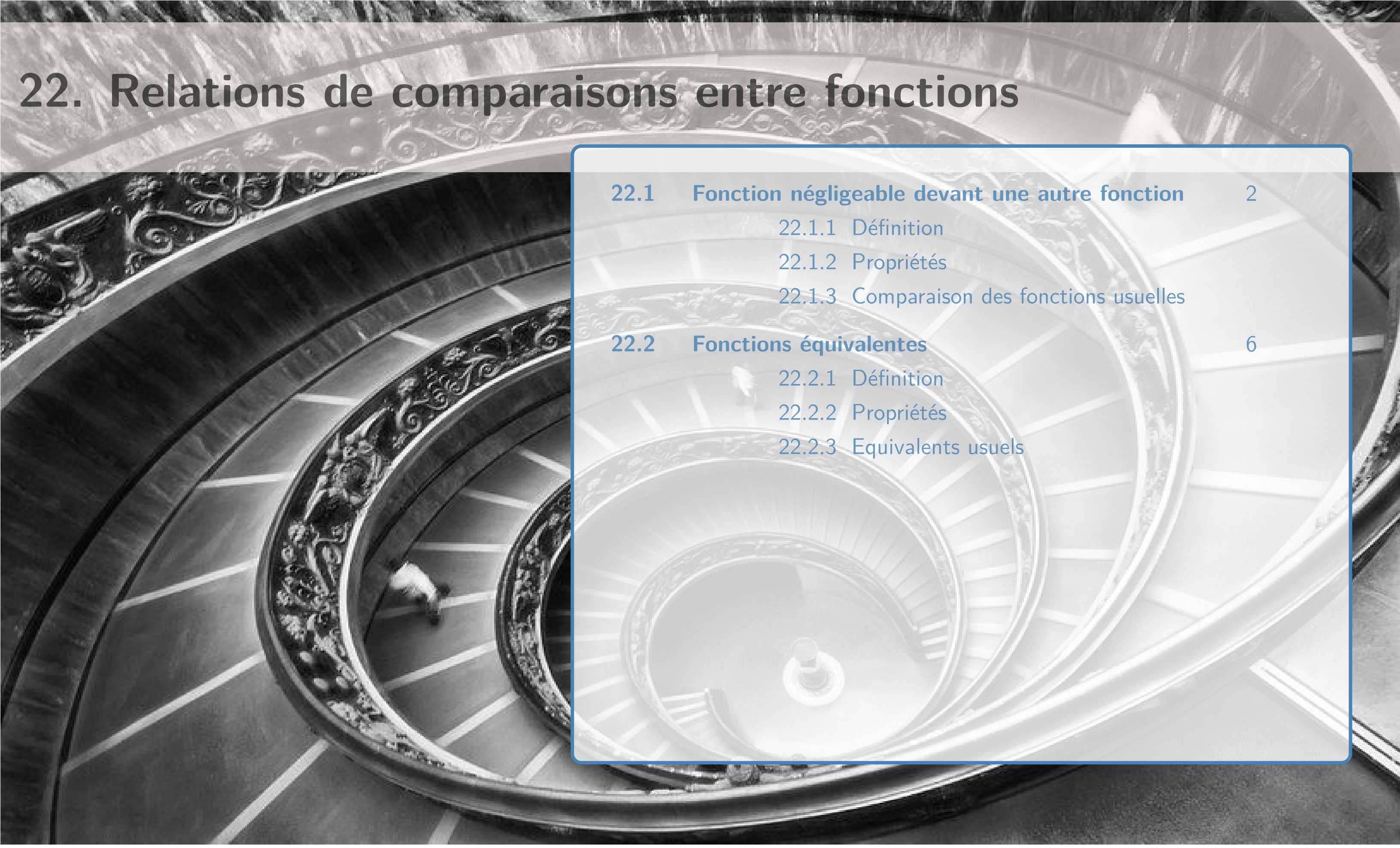

22. Relations de comparaisons entre fonctions

Pour choisir une chaussette plutôt que l'autre pour chaque paire d'une collection infinie, on a besoin de l'axiome du choix. Mais pour les chaussures, ce n'est pas la peine.

Bertrand Russell

Ce chapitre est la continuité du Chapitre 18 dont le propos était l'étude des relations de comparaison entre suites. Nous y avions fait des études asymptotiques pour déterminer quelles suites avaient un comportement prépondérant sur d'autres. Puisque nous savons également manipuler les limites sur les fonctions, nous allons étendre ces notions aux fonctions réelles. Lorsqu'on parle de la limite d'une suite, il est sous-entendu qu'on considère que n tend vers $+\infty$. Pour les fonctions, il faudra simplement préciser la limite considérée, ainsi, les « à partir d'un certain rang », seront remplacés par des « dans un voisinage de ».

Notations :

- *On notera* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- *Soit* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, *on appellera voisinage de* x_0 *et on notera* V_{x_0} *tout intervalle ouvert contenant* x_0.
  Par exemple, si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ *est un voisinage de* x_0.

22.1 Fonction négligeable devant une autre fonction

22.1.1 Définition

Définition 22.1 Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g deux fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de x_0 lorsqu'il existe une fonction ε définie sur V_{x_0} telle que

$$\forall x \in V_{x_0}, \quad f(x) = g(x)\varepsilon(x) \quad \text{et que} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$.

<u>Remarque</u> : L'égalité $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ se lit « la fonction f est un petit o de la fonction g au voisinage de x_0 ».

Exemple 22.1 On a :

- $x^2 \underset{0}{=} o(x)$

  En effet, on a $x^2 = x \times x = x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

- $x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$

  En effet, pour $x \neq 0$, on a $x = x^2 \times \frac{1}{x} = x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Attention ! On désigne par le symbole $o(g(x))$ n'importe quelle fonction f qui est négligeable devant g. C'est une notation. Ainsi, si on a $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ et $h(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$, on ne peut pas en déduire que $f = h$!

<u>Notations</u> : L'écriture $f(x) = g(x) + o(h(x))$ au voisinage de x_0 signifie que $(f - g)(x) = o(h(x))$ au voisinage de x_0.

Exemple 22.2 On a $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

En effet, $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{-1}{x+1}$, on a alors $\varepsilon(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.
Ainsi $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

<u>Remarque</u> : De la même manière que pour les suites, on peut montrer l'équivalence suivante :

$$f(x) \underset{x_0}{=} o(1) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Proposition 22.1 Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g deux fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Si g ne s'annule pas sur V_{x_0}, alors

$$f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle des suites dans le Chapitre 18. □

Exemple 22.3

1. Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x), \quad x \underset{+\infty}{=} o\left(x^2\right), \quad x^2 \underset{+\infty}{=} o\left(e^x\right), \quad \frac{1}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Au voisinage de 0 , on a :

$$x^2 \underset{0}{=} o(x), \quad \frac{1}{x} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$, au voisinage de a, on a :

$$(x-a)^2 \underset{a}{=} o(x-a)$$

22.1.2 Propriétés

Proposition 22.2 (Somme et produit de fonctions négligeables) Soient f, g, h et k quatre fonctions, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{R}$, alors :

- Si $f(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$ alors $(f+g)(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, si $f(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$ alors $(\lambda f)(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) \underset{x_0}{=} o(h(x)) \iff f(x) \underset{x_0}{=} o(\lambda h(x))$.
- Si $f(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$ alors $(fg)(x) \underset{x_0}{=} o((hg)(x))$.
- Si $f(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x_0}{=} o(k(x))$ alors $(fg)(x) \underset{x_0}{=} o((hk)(x))$.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle des suites dans le Chapitre 18. □

Proposition 22.3 (Fonctions négligeables et passage à la puissance) Soient $x_0 \in \overline{R}$ et f, g deux fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Soit $\alpha > 0$, si $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ et si $f^\alpha(x)$ et $g^\alpha(x)$ sont bien définis, alors $f^\alpha(x) \underset{x_0}{=} o(g^\alpha(x))$.

Remarque : Ce résultat est en particulier vrai pour toutes les fonctions si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et pour toutes les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 22.4 (Transitivité des fonctions négligeables) Soit $x_0 \in \overline{R}$ et soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0.
Si $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$ et si $g(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$ alors $f(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$.

Remarque : En pratique, on exploite souvent ces relations en écrivant que :

1. $o((\lambda f)(x)) = o(f(x))$ *au voisinage de* x_0,
2. $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$ *au voisinage de* x_0,
3. $o(f(x))g(x) = o((fg)(x))$ *au voisinage de* x_0,
4. $o(f(x))o(g(x)) = o((fg)(x))$ *au voisinage de* x_0,

Ainsi, on écrira systématiquement $o(f(x))$ à la place de $o((3f)(x))$ par exemple et $o(1)$ à la place de $o(5)$.

INTERDIT ! Une soustraction étant en particulier une addition, on a bien

$$o(f(x)) - o(f(x)) = o(f(x)) \quad \text{et } \textbf{SURTOUT PAS} \quad o(f(x)) - o(f(x)) = 0\,!!!$$

On ne simplifie **JAMAIS** par des petits o.

Exemple 22.4 En revanche, on peut écrire, qu'au voisinage de 0, on a :

$$o(x) - xo(x) \underset{0}{=} o(x) - o\left(x^2\right) \underset{0}{=} o(x) - o(x) \underset{0}{=} o(x).$$

22.1.3 Comparaison des fonctions usuelles

Comparaison au voisinage de $+\infty$

Théorème 22.1 **(Comparaison des fonctions usuelles de même type)** Au voisinage de $+\infty$, on a :

1. Si $a < b$ alors $x^a \underset{+\infty}{=} o(x^b)$
2. Si $a < b$ alors $(\ln x)^a \underset{+\infty}{=} o((\ln x)^b)$
3. Si $0 < a < b$ alors $a^x \underset{+\infty}{=} o(b^x)$

Théorème 22.2 **(Comparaison des fonctions usuelles tendant vers l'infini à l'infini)** Au voisinage de $+\infty$, on a :

1. Si $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ alors $(\ln x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$
2. Si $\alpha > 0$ et $\beta > 1$ alors $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(\beta^x)$

Théorème 22.3 **(Comparaison des fonctions usuelles de limites nulles à l'infini)** Au voisinage de $+\infty$, on a :

1. Si $0 < a < 1$ et $b > 0$ alors $a^x \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^b}\right)$
2. Si $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ alors $\frac{1}{x^a} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{(\ln x)^b}\right)$

Démonstration. Les items 1. du Théorème 22.2 et 2. du Théorème 22.3 reposent sur le résultat de croissance comparée suivant :

$$\forall a > 0, \forall b > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^b}{x^a} = 0.$$

On rappelle un autre résultat important de croissance comparée :

$$\forall a > 0, \forall b > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^a e^{bx} = 0.$$

□

<u>Remarque</u> : En résumé, on peut écrire qu'au voisinage de $+\infty$:

$$e^{-x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \frac{1}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{1}{x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln x}\right), \quad \frac{1}{\ln(x)} \underset{+\infty}{=} o(1),$$

$$1 \underset{+\infty}{=} o(\ln x), \quad \ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x), \quad x \underset{+\infty}{=} o\left(x^2\right), \quad x^2 \underset{+\infty}{=} o\left(e^x\right).$$

Comparaison au voisinage de 0

Théorème 22.4 Au voisinage de 0, on a :

1. Si $a < b$ alors $x^b \underset{0}{=} o(x^a)$.
2. Si $a > 0$ alors $\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^a}\right)$.
3. Si $a > 0$ alors $x^a \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$.

Démonstration. Les items 2. et 3. de ce théorème se démontre en utilisant le résultat de croissance comparée suivant :

$$\forall a > 0, \quad \lim_{x\to 0} x^a \ln(x) = 0.$$

On a même plus généralement ,

$$\forall a > 0, \forall b > 0 \quad \lim_{x\to 0} x^a |\ln(x)|^b = 0.$$

□

<u>*Remarque*</u> *: On peut écrire qu'au voisinage de 0:*

$$x^2 \underset{0}{=} o(x), \quad x \underset{0}{=} o(\sqrt{x}), \quad \sqrt{x} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\ln(x)}\right), \quad \frac{1}{\ln(x)} \underset{0}{=} o(1),$$

et

$$1 \underset{0}{=} o(\ln(x)), \quad \ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{1}{x} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

22.2 Fonctions équivalentes

22.2.1 Définition

Définition 22.2 Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. On dit que f et g sont **équivalentes au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe une fonction φ définie sur V_{x_0} telle que

$$\forall x \in V_{x_0}, \quad f(x) = g(x)\varphi(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 1.$$

On note alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

Exemple 22.5 1. On a $\dfrac{1}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

2. On a $\ln(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\ln(x+1) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln x\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right),$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$ par composée de limites donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 0$ par quotient. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 1$ et $\ln(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

Proposition 22.5 Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Si g ne s'annule pas sur V_{x_0}, alors :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle des suites dans le Chapitre 18. □

Exemple 22.6 On a les équivalents suivants :

1. $x^2 + x + 2\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2$

En effet, on a pour $x \neq 0$,

$$\frac{x^2+x+2\ln(x)}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{2\ln(x)}{x^2}$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x+2\ln(x)}{x^2} = 1$ et on a le résultat.

2. $x^2 + x + 2\ln(x) \underset{0}{\sim} 2\ln(x)$

   En effet, on a pour $x > 0$,

   $$\frac{x^2 + x + 2\ln(x)}{2\ln(x)} = \frac{x^2}{2\ln(x)} + \frac{x}{2\ln(x)} + 1$$

   or $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2\ln(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2\ln(x)} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 + x + 2\ln(x)}{2\ln(x)} = 1$ et on a le résultat.

3. $\sqrt{x + x^2} \underset{+\infty}{\sim} x$

   En effet, on a pour $x \neq 0$,

   $$\frac{\sqrt{x + x^2}}{x} = \sqrt{\frac{x}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$$

   or $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ainsi $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x + x^2}}{x} = 1$ et on a le résultat.

4. $\sqrt{x + x^2} \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$

   En effet, pour $x > 0$, on a :

   $$\frac{\sqrt{x + x^2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x + x^2}{x}} = \sqrt{1 + x}$$

   ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x + x^2}}{\sqrt{x}} = 1$ et on a le résultat.

22.2.2 Propriétés

Proposition 22.6 (Lien entre équivalence et négligeabilité) Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. On a alors :

- $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \iff (f - g)(x) \underset{x_0}{=} o(f(x)) \iff (f - g)(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$.
- $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)) \iff (f + g)(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

La dernière équivalence est très utile pour trouver des équivalents de sommes.

Exercice 22.1 Donner des équivalents de :

1. $\ln(x) + 2x$ au voisinage de $+\infty$

   On a $\ln(x) + 2x \underset{+\infty}{\sim} 2x$ car $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(2x)$.

2. $\ln(x) + 2x$ au voisinage de 0

   On a $\ln(x) + 2x \underset{0}{\sim} \ln(x)$ car $2x \underset{0}{=} o(\ln(x))$.

3. $e^x + x^2$ au voisinage de $+\infty$

   On a $e^x + x^2 \underset{+\infty}{\sim} e^x$ car $x^2 \underset{+\infty}{=} o(e^x)$.

4. $e^x + x^2$ au voisinage de 0

   On a $e^x + x^2 \underset{0}{\sim} e^x$ car $x^2 \underset{0}{=} o(e^x)$. En effet, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$.

Proposition 22.7 **(Transitivité des équivalents)** Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0.
Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle des suites dans le Chapitre 18. □

Proposition 22.8 **(Equivalents et signe de la fonction)** Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0.

- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et si f ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors g non plus.
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et si f est positive au voisinage de x_0, alors g l'est également.

Exemple 22.7 La fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$ est positive pour x assez grand car elle est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Proposition 22.9 **(Produit et quotient d'équivalents)** Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f_1, f_2, g_1 et g_2 des fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0.

- Si $f_1(x) \underset{x_0}{\sim} f_2(x)$ et $g_1(x) \underset{x_0}{\sim} g_2(x)$ alors $(f_1 g_1)(x) \underset{x_0}{\sim} (f_2 g_2)(x)$.
- Si de plus g_2 ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors $\dfrac{f_1}{g_1}(x) \underset{x_0}{\sim} \dfrac{f_2}{g_2}(x)$.

Attention ! Si les équivalents se comportent bien avec le produit, ils ne sont **pas compatibles avec la somme** !

On gardera en tête le contre-exemple suivant. On définit les fonctions f, g, h et k sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = k(x) = -x^2$.
On a alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{+\infty}{\sim} k(x)$ mais $f(x) + h(x) = x \underset{+\infty}{\not\sim} g(x) + k(x) = 0$.

Proposition 22.10 (Equivalents et passage à la puissance) Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ alors $f^\alpha(x) \underset{x_0}{\sim} g^\alpha(x)$ dès que les puissances sont bien définies.

Remarque : Ce résultat est en particulier vrai pour toutes les fonctions si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et pour toutes les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemple 22.8 Déterminons au voisinage de $+\infty$ un équivalent de $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+x}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$.

On a, d'une part, $x^3 + x \underset{+\infty}{\sim} x^3$ et donc par passage à la puissance $\sqrt{x^3+x} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x^3}$.
On a, d'autre part, $x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et par passage à la puissance $\sqrt[3]{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[3]{x^2}$.
Ainsi par passage au quotient $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$ or $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ et $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ donc $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{\frac{5}{6}}$. En conclusion, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{\frac{5}{6}}$.

Proposition 22.11 (Equivalents et limites) Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0.

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} \ell$.
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et ces deux limites sont égales.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle des suites dans le Chapitre 18. □

Exemple 22.9 Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = x^2 - x - \sqrt{x}$.

On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Attention ! Si les fonctions f et g tendent vers la même limite finie ℓ non nulle alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ (car les deux fonctions sont équivalentes à ℓ au voisinage de $+\infty$). En revanche, si $\ell \in \{-\infty, 0, +\infty\}$, on ne **peut rien conclure** !

On peut penser au contre-exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ ou encore $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

22.2.3 Equivalents usuels

Proposition 22.12 (Equivalents usuels au voisinage de zéro) Soit α un réel non nul fixé,

1. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
2. $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
3. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$
4. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
5. $1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
6. $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$

Exemple 22.10

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^2}$. Déterminer un équivalent de f au voisinage de 0.

   Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, les équivalents précédents donnent $\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x$. En divisant par x^2 qui ne s'annule pas au voisinage de 0, on trouve

   $$\frac{\sin(2x)}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{2}{x}.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Déterminer un équivalent de g au voisinage de $+\infty$.

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, les équivalents précédents donnent directement $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Exercice 22.2 Dans chaque cas, donner un équivalent simple :

1. $f(x) = \ln\left(1+x+2x^2\right)$ au voisinage de 0

   Comme $\lim\limits_{x\to 0} x+2x^2 = 0$, les équivalents usuels donnent :

   $$\ln(1+x+2x^2) \underset{0}{\sim} x+2x^2 \underset{0}{\sim} x.$$

2. $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ au voisinage de 0

Remarquons que $g(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2e^x}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, on a $\mathrm{e}^{2x}-1 \underset{0}{\sim} 2x$, de plus comme $\lim\limits_{x\to 0} 2\mathrm{e}^x = 2$, on a $2\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 2$ ainsi par quotient :

$$g(x) \underset{0}{\sim} \frac{2x}{2} \underset{0}{\sim} x.$$

Exercice 22.3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - \sqrt{x+1}}{\frac{1}{x} - x^2 + \mathrm{e}^x}$.
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Il s'agit a priori d'une forme indéterminée. Calculons un équivalent de f au voisinage de $+\infty$ pour lever l'indétermination.
Au voisinage de $+\infty$, on a $x+1 \sim x$ donc $\sqrt{x+1} \sim \sqrt{x}$ or $\sqrt{x} = o(x^3)$ donc $\sqrt{x+1} = o(x^3)$.
Ainsi $x^3 - \sqrt{x+1} \sim x^3$.
De plus $\frac{1}{x} - x^2 + \mathrm{e}^x \sim \mathrm{e}^x$ car $\frac{1}{x} = o(\mathrm{e}^x)$ et $\frac{1}{x} = o(\mathrm{e}^x)$.
On a ainsi :

$$f(x) \sim \frac{x^3}{\mathrm{e}^x}.$$

On en conclut que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = 0 \quad \text{par croissance comparée.}$$