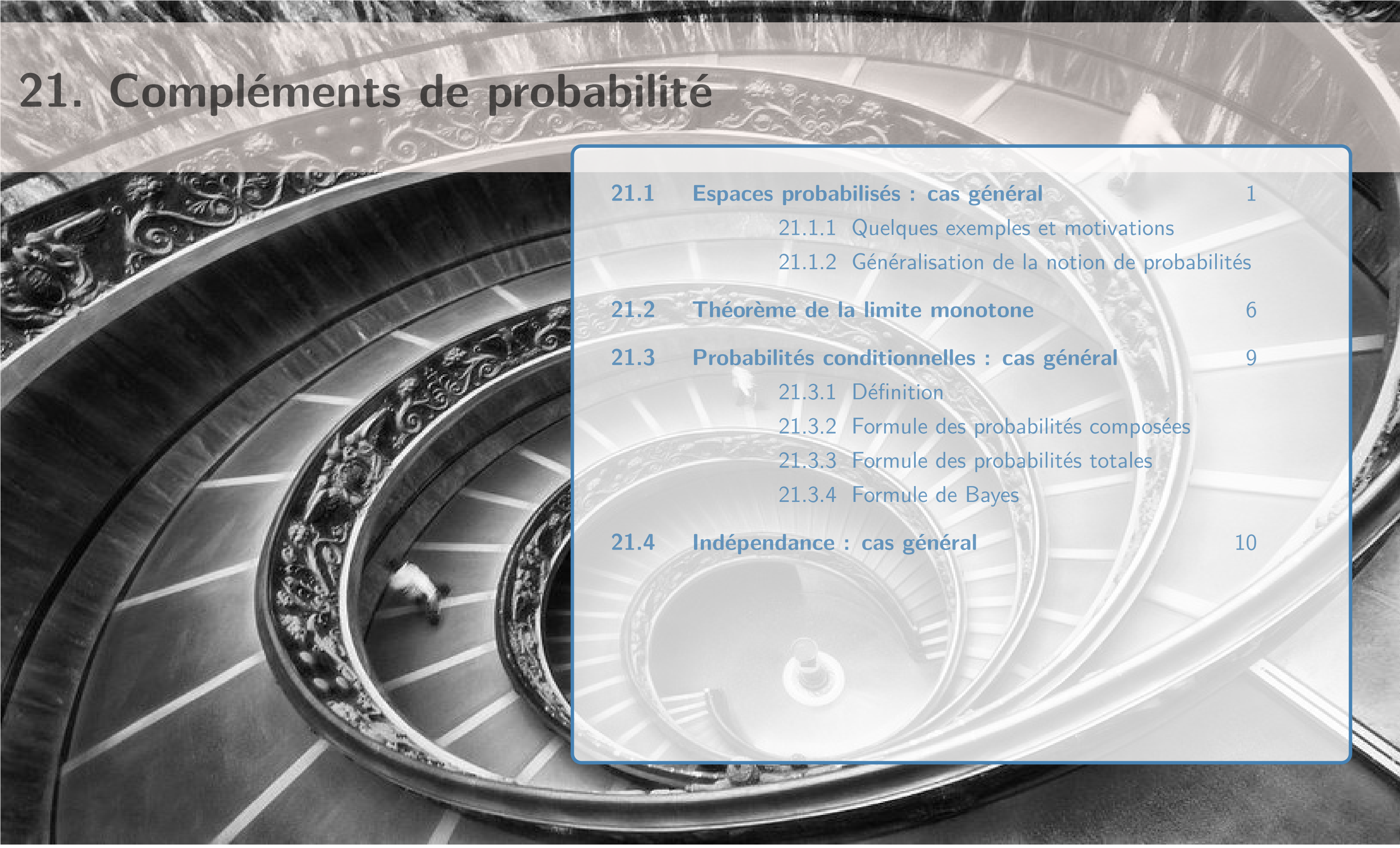

21. Compléments de probabilité

Si bien doué que l'on soit, on ne fait rien de grand sans travail.

Henri Poincaré

Ce chapitre complète et généralise les résultats établis au Chapitre 11 dans le cas des univers finis. Les principales notions sont reprises dans ce nouveau cadre. Certaines changent peu, d'autres au contraire nécessitent de prendre des précautions supplémentaires. Ainsi, les sommes qui intervenaient dans le Chapitre 11 sont remplacées par des séries dont il faut d'abord s'assurer de la convergence.

21.1 Espaces probabilisés : cas général

21.1.1 Quelques exemples et motivations

Dans le Chapitre 11, nous nous sommes intéressés à la modélisation d'expériences aléatoires dont l'ensemble des issues possibles (l'univers Ω) est fini. Cependant, il existe une multitude de situations ou l'univers Ω est infini :

Exemple 21.1

1. On jette une pièce et on note le premier rang pour lequel le résultat est « Pile ». Alors, $\Omega = \mathbb{N}^*$.
2. On jette un dé à six faces une infinité de fois et on note la suite des résultats obtenus. Alors, $\Omega = [\![1;6]\!]^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites d'éléments de $[\![1;6]\!]$).
3. On note le temps d'attente d'un bus, qui est un nombre aléatoire dans $\mathbb{R}_+$.

Définition 21.1 Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.

Remarque : Un ensemble dénombrable est un ensemble dont on peut numéroter les éléments, même si il a un nombre infini d'éléments.

Exemple 21.2

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
2. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
3. $[\![1;6]\!]^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Dans la suite, on va vouloir calculer la probabilité de certaines parties de l'univers Ω. Malheureusement, lorsque Ω sera infini non dénombrable, on ne pourra pas s'intéresser à l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω car celui-ci est beaucoup « trop gros ». On se restreindra donc à un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui constituera l'ensemble des parties dont on peut calculer la probabilité. Afin d'obtenir un modèle aussi cohérent que possible, il faut imposer certaines conditions de stabilité à $\mathcal{A}$: par union, intersection, passage au complémentaire, etc.

Définition 21.2 Soit l'univers Ω des issues d'une expérience donnée . L'ensemble des événements noté $\mathcal{A}$ vérifiera les propriétés suivantes :

- $\Omega\in\mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : si $A\in\mathcal{A}$, alors $\overline{A}\in\mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\in\mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega,\mathcal{A})$ est alors appelé **espace probabilisable**, et les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés les **événements**.

Remarque :

- *La condition $\Omega\in\mathcal{A}$ peut être remplacée par $\emptyset\in\mathcal{A}$ car l'ensemble $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire.*
- *De même la condition de stabilité par union dénombrable est équivalente à la condition de stabilité par intersection dénombrable.*
  $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\in\mathcal{A}$.
  Encore une fois c'est une conséquence de la stabilité par passage au complémentaire. En effet, on rappelle que : $\displaystyle\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$ et $\displaystyle\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$.

Exemple 21.3
1. $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifie bien les points de la Définition 21.2. C'est l'ensemble des événements que l'on utilisait dans le cas d'un univers fini.
2. Si $A \subseteq \Omega$, alors $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ vérifie bien les points de la Définition 21.2.

Remarque : ***Comparaison avec la notion d'espace probabilisable dans le cas fini***
Un ensemble d'événements $\mathcal{A}$ vérifiant les points de la Définition 21.2 doit être considéré comme notre nouveau modèle d'ensemble regroupant les événements.

- *Dans le cas où Ω est fini, on choisissait $\mathcal{P}(\Omega)$ (cf Chapitre 11) : $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ espace probabilisable.*
- *Dans le cas où Ω est infini, $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifie encore les points de la Définition 21.2 (elle contient **tous** les événements que l'on peut définir sur Ω) donc $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est bien un espace probabilisable.*
- *Mais alors pourquoi ne pas prendre toujours $\mathcal{P}(\Omega)$ qui regroupe tous les événements que l'on peut former sur Ω ?*

En fait, si $\Omega = \mathbb{R}$ (infini non dénombrable) le choix de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ comme espace probabilisable a peu de sens. Le but d'un espace probabilisable est d'accueillir une fonction de probabilité qui en fait un espace probabilisé. On peut démontrer (largement hors de notre portée) que l'on ne peut définir de probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tout entier : on ne peut mesurer la probabilité de certaines parties de $\mathbb{R}$.

Remarque :

- *Les éléments de $\mathcal{A}$ vérifiant les points de la Définition 21.2 sont des ensembles.*
- *En pratique, c'est l'énoncé qui précisera l'ensemble $\mathcal{A}$ à considérer.*

Définition 21.3 **(Union et intersection infinies dénombrables)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit A_n un événement:

- La réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est l'événement « au moins un des événements A_n se réalise ».
$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad x \in A_{n_0}$$
- L'intersection $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est l'événement « tous les événements A_n se réalisent».
$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in A_n$$

Exemple 21.4 On lance une pièce une infinité de fois. On note A_n l'événement « obtenir pile au n-ème lancer ».

- L'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est l'événement « obtenir au moins un pile ». En terme mathématique, on écrit $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que A_k soit réalisé.
- L'événement $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ est l'événement « n'obtenir que des piles ». En terme mathématique, on écrit $\forall k \in \mathbb{N}^*$, A_k est réalisé.

Définition 21.4 **(Système complet d'événements)** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$. Une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est un système complet d'événements si :

- Les événements sont deux à deux incompatibles : pour tout $(i;j) \in I^2$ avec $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- Leur réunion est Ω : $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

<u>*Remarque*</u> *: Un système complet d'événements peut comporter une infinité d'événements !*

Exemple 21.5 On lance un dé jusqu'à obtenir un premier 6. On note A_0 l'événement «ne jamais obtenir un 6» et A_n l'événement «on obtient le premier 6 au n-ième lancer».

La famille d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.

21.1.2 Généralisation de la notion de probabilités

Définition 21.5 **(Espace probabilisé)** Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0;1]$ vérifiant :

- $P(\Omega) = 1$
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est alors appelé **espace probabilisé**, et pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ est la **probabilité** de l'événement A.

Remarque :

- *La série* $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ *est bien convergente.*
- *Toutes les formules du Chapitre 11 restent vraies, car la définition précédente généralise celle donnée dans ce chapitre :*
  1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
  2. $P(\emptyset) = 0$.
  3. *Croissance de* P *: Si* $A \subset B$*, alors* $P(A) \leqslant P(B)$.
  4. $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap \bar{B})$.
  5. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Proposition 21.1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

Exercice 21.1 On considère l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. Montrer que la probabilité définie sur cet espace en posant :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad P(\{n\}) = \frac{1}{2^n},$$

vérifie bien $P(\Omega) = 1$.
On considère $A = \{2k\,;\, k\in\mathbb{N}^*\}$ et $B = \{2k+1\,;\, k\in\mathbb{N}\}$. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

$P(\Omega) = P(\mathbb{N}^*)$ or $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{n\}$, ainsi :

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{n\}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{n\}).$$

On a alors : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^0} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$ On reconnaît la somme de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}\in]-1;1[$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Ainsi définie, P vérifie bien $P(\Omega) = 1$. Par ailleurs, on peut écrire $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{2n\}$.

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{2n\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{4^0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} - 1\,.$$

On reconnaît la somme de la série géométrique de raison $\frac{1}{4}$. Ainsi,

$$P(A) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Par ailleurs, il est clair que $\mathbb{N}^* = A \cup B$, et que A et B sont incompatibles. Dès lors :

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Définition 21.6 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

- Si A est un évènement de probabilité nulle ($P(A) = 0$), alors on dit que A est **négligeable**.
- Si A est un évènement de probabilité égale à 1 ($P(A) = 1$), alors on dit que A est **presque sûr**.
- Soit $\mathcal{P}$ une propriété et $A = \{\omega \in \Omega\ ;\ \omega \text{ vérifie la propriété } \mathcal{P}\}$.
  Si $P(A) = 1$, on dit que la propriété $\mathcal{P}$ est **vraie presque sûrement**.

Attention ! Dans le cas d'un univers fini, les notions d'événements impossibles et d'événements négligeables se confondent. De même pour les notions d'événements certains et presque sûrs. Mais, dans le cas d'un univers infini, ce n'est plus le cas.

21.2 Théorème de la limite monotone

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Définition 21.7 Soit (B_n) une famille d'événements de $\mathcal{A}$.

- La famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad B_n \subseteq B_{n+1}\,.$$

  La famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad B_{n+1} \subseteq B_n\,.$$

Théorème 21.1

- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille croissante d'événements de $\mathcal{A}$, alors la suite $(P(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$

- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille décroissante d'événements de $\mathcal{A}$, alors la suite $(P(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$

Ce théorème permet de démontrer le résultat (très important) suivant :

Corollaire 21.1 Si (A_n) est une famille quelconque d'événements de $\mathcal{A}$, alors on a :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \qquad \text{et} \qquad P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

Exemple 21.6 On lance une infinité de fois une pièce de monnaie non truquée. On note A_n l'événement « obtenir pile au n-ième lancer ». L'événement A : « obtenir Pile à chaque lancer » est négligeable.

Obtenir Pile à chaque lancer signifie que $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n est réalisé. On a donc l'égalité

$$A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

La pièce étant non truquée, on a $P(A_n) = \frac{1}{2}$.
D'après le corollaire du théorème de limite monotone, on a :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right).$$

Les événements $(A_n)_n$ étant deux à deux indépendants, on a :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Or $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Ainsi

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 0.$$

L'événement A est donc bien négligeable.

Exercice type 21.1 On effectue une succession de lancers d'un dé équilibré jusqu'à obtenir le premier 6. On note A l'événement «on effectue un nombre fini de lancers». Autrement dit, A est l'événement «on obtient au moins un 6». On souhaite calculer $P(A)$. Pour cela, on considère les événements A_n «on obtient 6 pour la première fois au n-ième lancer».

1. Comment écrire A à l'aide des événements A_n?
2. Exprimer $P(A_n)$ en fonction de n.
3. Pour tout $n \geqslant 1$, calculer $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ en fonction de n.
4. En déduire $P(A)$. Que peut-on dire de l'événement A?

Correction:

1. L'événement A est réalisé, si et seulement si, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n est réalisé. Autrement dit,
$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n .$$

2. A_n est réalisé si on a obtenu un nombre autre que 6 aux $n-1$ premiers lancers et un 6 au n-ième lancer. Ainsi,
$$P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} .$$

3. Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, donc :
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times \frac{6}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k} .$$
On est donc ramené au calcul d'une somme géométrique. Dès lors :
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n .$$

4. D'après le corollaire du théorème de la limite monotone, et avec les résultats des questions précédentes, on a :
$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 1 .$$
L'événement A est donc presque-sûr.

21.3 Probabilités conditionnelles : cas général

Presque tout ce qui a été vu dans le cas fini fonctionne à l'identique dans le cas infini : définition de la probabilité conditionnelle, indépendance d'événements, formule de Bayes, formule des probabilités composées. Il faut cependant adapter les notions d'indépendance mutuelle d'événements et la formule des probabilités totales.

21.3.1 Définition

Définition 21.8 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$ un évéenement tel que $P(A) \neq 0$. Soit $B \in \mathcal{A}$. On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant** A le nombre :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Théorème 21.2 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$ un événement tel que $P(A) \neq 0$. L'application P_A ainsi définie est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.

21.3.2 Formule des probabilités composées

Proposition 21.2 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soient A_1, A_2, $\cdots$, A_n des événements de $\mathcal{A}$ tels que $P(A_1 \cap \cdots A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \cdots A_{n-1}}(A_n).$$

21.3.3 Formule des probabilités totales

Proposition 21.3 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements non négligeables d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout événement $B \in \mathcal{A}$, on a :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(B \cap A_k).$$

Si de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) \neq 0$, alors on a aussi :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{A_k}(B) P(A_k).$$

Remarque : En particulier, la formule des probabilités totales assure que les séries $\sum_{n \geqslant 1} P(B \cap A_n)$ *et* $\sum_{n \geqslant 1} P_{A_n}(B) P(A_n)$ *sont convergentes.*

Exemple 21.7 On considère une infinité d'urnes numérotées par les entiers de $\mathbb{N}^*$, et telles que pour $i \in \mathbb{N}^*$, l'urne U_i contienne $i!$ boules numérotées de 1 à $i!$. On choisit une urne au hasard selon la loi suivante : pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on choisit l'urne U_i avec probabilité $\frac{1}{2^i}$. Puis on tire une boule au hasard dans cette urne. Calculer la probabilité de tirer la boule numéro 1.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$, on note A_i l'événement « l'urne i est choisie », et G l'événement « on tire la boule numéro 1 ». Comme les A_i forment un système complet d'événements et que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(A_i) = \frac{1}{2^i} \neq 0$, la formule des probabilités totales donne:

$$P(G) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(G \cap A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i) P_{A_i}(G) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{i!} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1 \simeq 0,35.$$

21.3.4 Formule de Bayes

Proposition 21.4

1. Si A et B sont deux événements de probabilité non nulles, alors on a :
$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$
2. Soit I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ un systéme complet d'événements tel que $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$. Si B est un événement de probabilité non nulle, alors pour tout $k \in I$:
$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}.$$

21.4 Indépendance : cas général

Définition 21.9 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- On dit que les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ sont **deux à deux indépendants** si:
$$\forall (k;l) \in (\mathbb{N}^*)^2, \qquad k \neq l \quad \Rightarrow \quad P(A_k \cap A_l) = P(A_k)P(A_l).$$
- On dit que les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ sont **mutuellement indépendants** si:
$$\text{pour tout partie finie } I \subseteq \mathbb{N}^* \qquad P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i).$$

Remarque : Il est plutôt rare en pratique d'avoir à démontrer une telle indépendance. Elle provient la plupart du temps d'un choix de modélisation.

Exemple 21.8 Si on lance une infinité de fois une pièce donnant pile avec une probabilité $p \in]0;1[$ et que l'on appelle A_n l'événement «obtenir pile au n-ème lancer», on peut considérer que les A_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont indépendants. Ainsi la probabilité que pile apparaisse pour la première fois au n-ème lancer est :

$$P(A_n \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_{n-2}} \cap \ldots \cap \overline{A_1}) = p(1-p)^{n-1}.$$