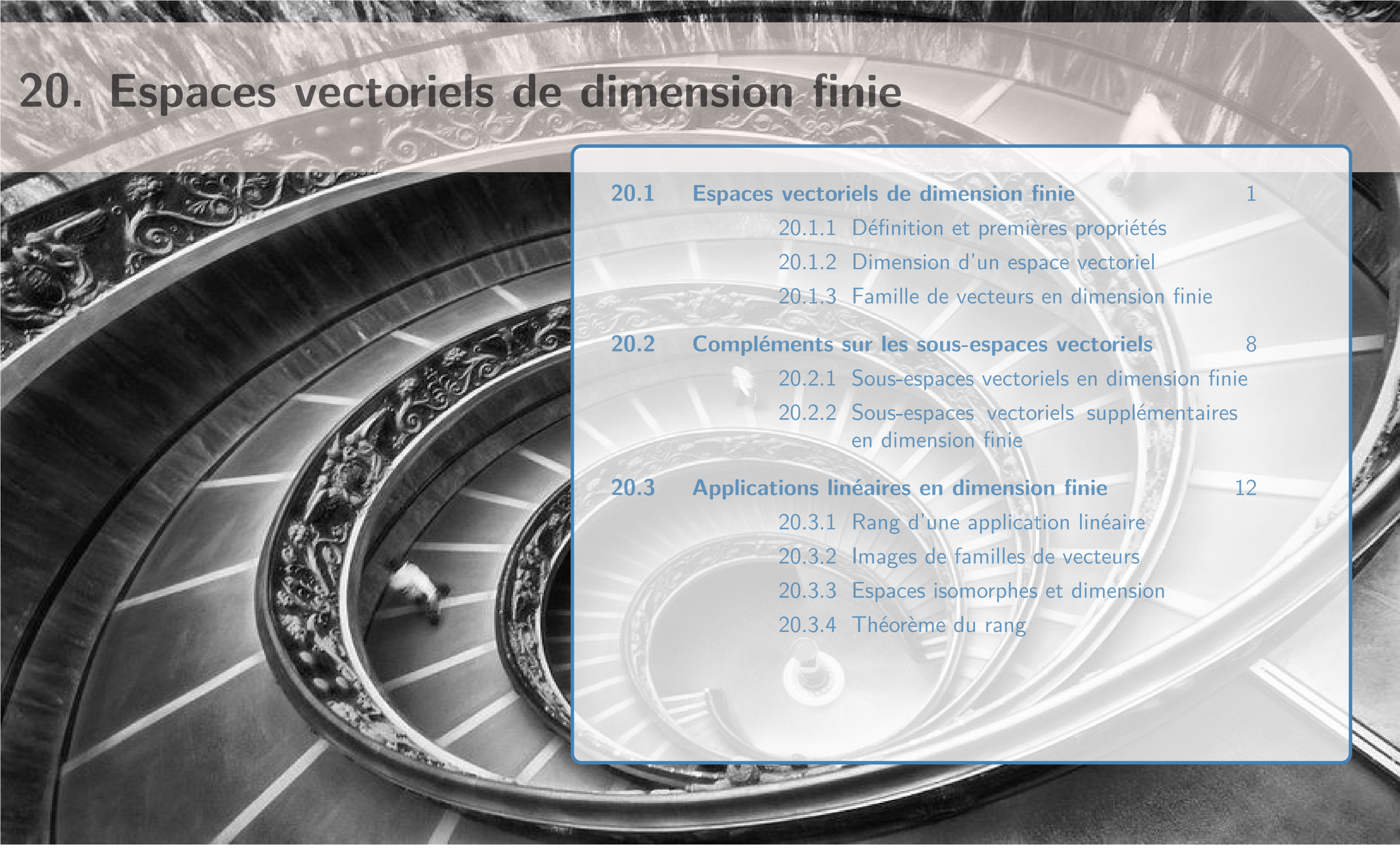

20. Espaces vectoriels de dimension finie

20.1 Espaces vectoriels de dimension finie 1
20.1.1 Définition et premières propriétés
20.1.2 Dimension d'un espace vectoriel
20.1.3 Famille de vecteurs en dimension finie
20.2 Compléments sur les sous-espaces vectoriels 8
20.2.1 Sous-espaces vectoriels en dimension finie
20.2.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires en dimension finie
20.3 Applications linéaires en dimension finie 12
20.3.1 Rang d'une application linéaire
20.3.2 Images de familles de vecteurs
20.3.3 Espaces isomorphes et dimension
20.3.4 Théorème du rang

Il semble que ce soit le destin de Grassmann d'être redécouvert de temps en temps, à chaque fois comme s'il avait été pratiquement oublié.

Albert C. Lewis

Ce chapitre est probablement le plus important de l'année en algèbre linéaire. Il est la base du cours de deuxième année dans ce domaine. Nous allons y étudier des espaces vectoriels particuliers dits de dimension finie. Les connaissances mathématiques sur ces espaces sont très denses et de nombreux résultats résultent de la notion de dimension. Nous verrons également les conséquences de la dimension finie sur les applications linéaires et découvrirons enfin le Théorème du rang.

20.1 Espaces vectoriels de dimension finie

20.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 20.1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit que E est un **espace vectoriel de dimension finie** lorsqu'il admet une famille génératrice comportant un nombre fini d'éléments, i.e. lorsqu'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de vecteurs de E tels que

$$E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Remarque :

- *Par convention,* $E = \{0_E\}$ *est un espace vectoriel de dimension finie.*
- *Si E n'est pas de dimension finie, on dit qu'il est de dimension infinie.*

Exemple 20.1 On a déjà rencontré notamment :

-
-
-
-
-

Théorème 20.1 Tout espace vectoriel E de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$ admet au moins une base.

Démonstration.

$\square$

20.1.2 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 20.2 **(Admis)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E alors

$$\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{G}).$$

<u>*Remarque*</u> *: Cela implique que si il existe une famille génératrice de E de cardinal n alors toute famille de cardinal* $n+1$ *est liée.*

Théorème 20.3 **(Dimension d'un espace vectoriel)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Cet entier naturel est appelé la dimension de l'espace vectoriel et est noté $\dim(E)$.

<u>*Remarque*</u> *: Si* $E = \{0_E\}$*, on pose par convention* $\dim(E) = 0$*. Si E est un espace vectoriel de dimension infinie, on pose* $\dim(E) = +\infty$.

Démonstration.

□

Méthode 20.1 **(Déterminer la dimension d'un espace vectoriel)** Pour trouver la dimension d'un espace vectoriel, il suffit d'en exhiber une base et de calculer son cardinal.

Exemple 20.2

1. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension donc une base est
2. $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel de dimension donc une base est
3. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension donc une base est

4. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension dont une base est

Remarque : *Interprétation graphique*

- *Les visualisations géométriques planes correspondent à la dimension 2. Celles dans l'espace correspondent à la dimension* 3.
- *Finalement, la dimension d'un espace est le nombre de degrés de liberté dans le choix d'un élément, ou le nombre de paramètres à fixer pour caractériser totalement un élément.*

20.1.3 Famille de vecteurs en dimension finie

Corollaire 20.1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors:

- Toute famille libre $\mathcal{L}$ de E vérifie $\text{Card}(\mathcal{L}) \leqslant n$.
- Toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de E vérifie $\text{Card}(\mathcal{G}) \geqslant n$.
- Toute base $\mathcal{B}$ de E vérifie $\text{Card}(\mathcal{B}) = n$.

Théorème 20.4 **(Base en dimension n)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de cardinal n. On a alors équivalence entre les trois assertions suivantes :

1. $\mathcal{B}$ est une base de E.
2. $\mathcal{B}$ est une famille libre de E.
3. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.

Méthode 20.2 **(Pour montrer qu'une famille est une base)** Si on travaille dans un espace vectoriel E dont on connaît la dimension $n \in \mathbb{N}^*$ alors pour montrer qu'une famille de cardinal n est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre **ou** génératrice de E.
Dans la pratique, il est souvent plus simple et plus rapide de montrer qu'elle est libre.

Exercice 20.1 Soient $u = (1,2,3)$, $v = (-1,0,2)$ et $w = (2,2,-1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20.2 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$. Soient $P = 1$, $Q = x+1$ et $R = x^2+x+1$. Montrer que $\mathcal{B} = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Définition 20.2 (Rang d'une famille finie de vecteurs) Soit E un espace vectoriel et soit $\left(f_1, f_2, \dots, f_p\right)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **rang** de la famille $\left(f_1, f_2, \dots, f_p\right)$ et on note $\mathrm{rg}\left(f_1, f_2, \dots, f_p\right)$ la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre ;

$$\mathrm{rg}\left(f_1, f_2, \dots, f_p\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(f_1, f_2, \dots, f_p\right)\right).$$

Exemple 20.3 Dans $\mathbb{R}_2[x]$,

- $\mathrm{rg}\left(x, x^2\right) =$
- $\mathrm{rg}\left(1, x+1, x, x^2\right) =$
- $\mathrm{rg}\left((x+1)^2, x^2\right) =$

Proposition 20.1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E $(p \in \mathbb{N}^*)$. On a :

1. $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant p$ avec égalité ssi $(x_1, \dots, x_p)$ est libre dans E.
2. $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant n$ avec égalité ssi $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice de E.
3. Si $n = p$, $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p) = p$ ssi $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de E.

Remarque : On ne modifie pas le rang d'une famille de vecteurs lorsque :

- *on retire le vecteur nul de la famille si celui-ci y apparait,*
- *on permute les vecteurs de la famille,*
- *on multiple un vecteur par un scalaire $\lambda \neq 0$.*
- *on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres.*

Méthode 20.3 **(Déterminer le rang d'une famille de vecteurs)** Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on utilise les 4 opérations précédentes pour réduire pas à pas la famille jusqu'à en extraire une famille libre. Le rang de la famille de vecteurs est donc égal au cardinal de la famille libre extraite.
Cette méthode peut faire penser à l'algorithme du pivot de Gauss.

Exercice 20.3 Déterminer le rang de la famille (u, v, w, x) de $\mathbb{R}^4$ définie par $u = (1,1,1,0)$, $v = (2,4,0,1)$, $w = (1,3,-1,1)$ et $x = (3,7,-1,2)$.

Théorème 20.5 (Base incomplète) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{L} = \left(e_1, e_2, \dots, e_p\right)$ une famille libre de E de cardinal $p \in [\![1, n]\!]$. Alors la famille $\mathcal{L}$ peut-être complétée par $n-p$ vecteurs $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n$ de E pour former une base de E.

Démonstration.

□

Exemple 20.4 Compléter $(x+2, x+1)$ en une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

20.2 Compléments sur les sous-espaces vectoriels

20.2.1 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème 20.6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-espace vectoriel de E alors G est un espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim(G) \leqslant \dim(E).$$

De plus, si $\dim(G) = \dim(E)$, on a $G = E$.

Méthode 20.4 **(Egalité de deux espaces vectoriels)** Pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux, on peut montrer que **l'un est inclus dans l'autre** et montrer qu'ils ont la **même dimension**. C'est parfois plus facile que de raisonner par double inclusion.

Exercice 20.4 Montrer que $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) = \mathrm{Vect}((1,2,0),(2,3,0))$.

Définition 20.3 **(Droites, plans et hyperplans vectoriels)** On appelle :

- **droite vectorielle** tout espace ou sous-espace vectoriel de **dimension 1**.
- **plan vectoriel** tout espace ou sous-espace vectoriel de **dimension 2**.

De plus, si E est un espace vectoriel de dimension n, on appelle **hyperplan de** E tout sous-espace vectoriel de **dimension** $n-1$.

Exemple 20.5

- $\mathrm{Vect}((1,1))$ est
- $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ est

Exercice 20.5 On note $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ est une droite vectorielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est une hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

20.2.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires en dimension finie

Proposition 20.2 (Existence d'un supplémentaire en dimension finie) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E alors F admet un sous-espace vectoriel supplémentaire G dans E.

Démonstration.

□

Attention ! Il y a existence du supplémentaire mais pas unicité.

Proposition 20.3 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E de dimension finie. On peut alors construire une base de E en concaténant une base de F et une base de G. En particulier, on a :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

Théorème 20.7 (Formule de Grassman) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G_1 et G_2 deux sous-espaces vectoriels quelconques de E alors

$$\dim(G_1 + G_2) = \dim(G_1) + \dim(G_2) - \dim(G_1 \cap G_2).$$

Théorème 20.8 (Caractérisation de deux sev supplémentaires) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E i.e. $E = F \oplus G$
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$,
3. $E = F + G$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$,
4. Si $\mathcal{B}_1$ est une base de F et $\mathcal{B}_2$ est une base de G, la famille $\mathcal{B}$ obtenue en juxtaposant les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et ceux de $\mathcal{B}_2$ est une base de E.

Méthode 20.5 (Construire un supplémentaire) Pour construire un supplémentaire à un sous-espace vectoriel F, il suffit de compléter une base de F en une base de E et de considérer G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs ajoutés.

Exemple 20.6 Déterminer un supplémentaire de $F = \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20.6 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1) = 0\}$.
Déterminer un supplémentaire à F dans $\mathbb{R}_2[x]$.

20.3 Applications linéaires en dimension finie

20.3.1 Rang d'une application linéaire

Proposition 20.4 Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une de ses bases. Alors une application linéaire f de E dans F est définie de manière unique par la donnée de la famille :

$$(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Exemple 20.7 Déterminer l'unique application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $f((1,0)) = (2,1)$ et $f((0,1)) = (1,1)$.

Définition 20.4 (Rang d'une application linéaire) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel. Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle rang de f, et on note $\mathrm{rg}(f)$ la valeur :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Remarque :

- *Rappelons une Proposition vue dans le Chapitre 16.*
  Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E admet une famille génératrice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alors :

  $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

  En particulier, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ et on a

  $$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

- *La fonction nulle est la seule application de rang 0.*

Exemple 20.8 Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$. Calculer le rang de f.

20.3.2 Images de familles de vecteurs

Exercice 20.7 Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

1. Supposons que f est injective, montrer que l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F.

2. Supposons que f est surjective, montrer que l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

Proposition 20.5 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application linéaire de E dans F alors

- si f est bijective, l'image par f de toute base de E est une base de F.
- S'il existe une base de E dont l'image par f est une base de F alors f est bijective.

Démonstration. Le premier point résulte des propriétés démontrées dans l'Exercice 20.7. □

20.3.3 Espaces isomorphes et dimension

Proposition 20.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration.

□

Corollaire 20.2 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, ils sont isomorphes si et seulement si

$$\dim(E) = \dim(F).$$

Remarque : Les résultats précédents nous fournissent une nouvelle méthode pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel. En effet, pour calculer la dimension d'un espace vectoriel E, on peut montrer qu'il est isomorphe à un espace vectoriel F dont on connaît la dimension (en exhibant l'isomorphisme).

Exercice 20.8 Soient $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$ et $T = E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \quad T(u) = (u_0, u_1).$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Montrer que T est un isomorphisme. En déduire la dimension de E.

20.3.4 Théorème du rang

Théorème 20.9 Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On suppose que E est de dimension finie alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

Démonstration.

$\square$

Exercice 20.9 On considère l'endomorphisme $\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y+z \\ y-x \\ 2x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$.

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 20.7 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et f une application linéaire de E dans F alors :

$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est bijective } \iff \mathrm{rg}(f) = \dim(F).$$

Démonstration.

□

Méthode 20.6 (Pour montrer que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme) En dimension finie et dans le cas où $\dim(E) = \dim(F)$, pour montrer que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective **ou** surjective.
Souvent on choisira de montrer l'injectivité en utilisant la caractérisation par le noyau.

Lorsque f est un endomorphisme, l'égalité des dimensions est forcément vraie.

Exercice 20.10 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui à (x,y,z) associe $(y+z, z+x, x+y)$. Montrer que f est bijectif.

Exercice 20.11 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim(E) = \dim(F)$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $v \circ u = Id_E$. Montrer que u et v sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Proposition 20.8 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et ϕ une forme linéaire non nulle de E alors le noyau de ϕ est un hyperplan de E.

Démonstration.

□

Exercice 20.12 Montrer que l'ensemble des polynômes de degré au plus n admettant 1 pour racine est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[x]$.