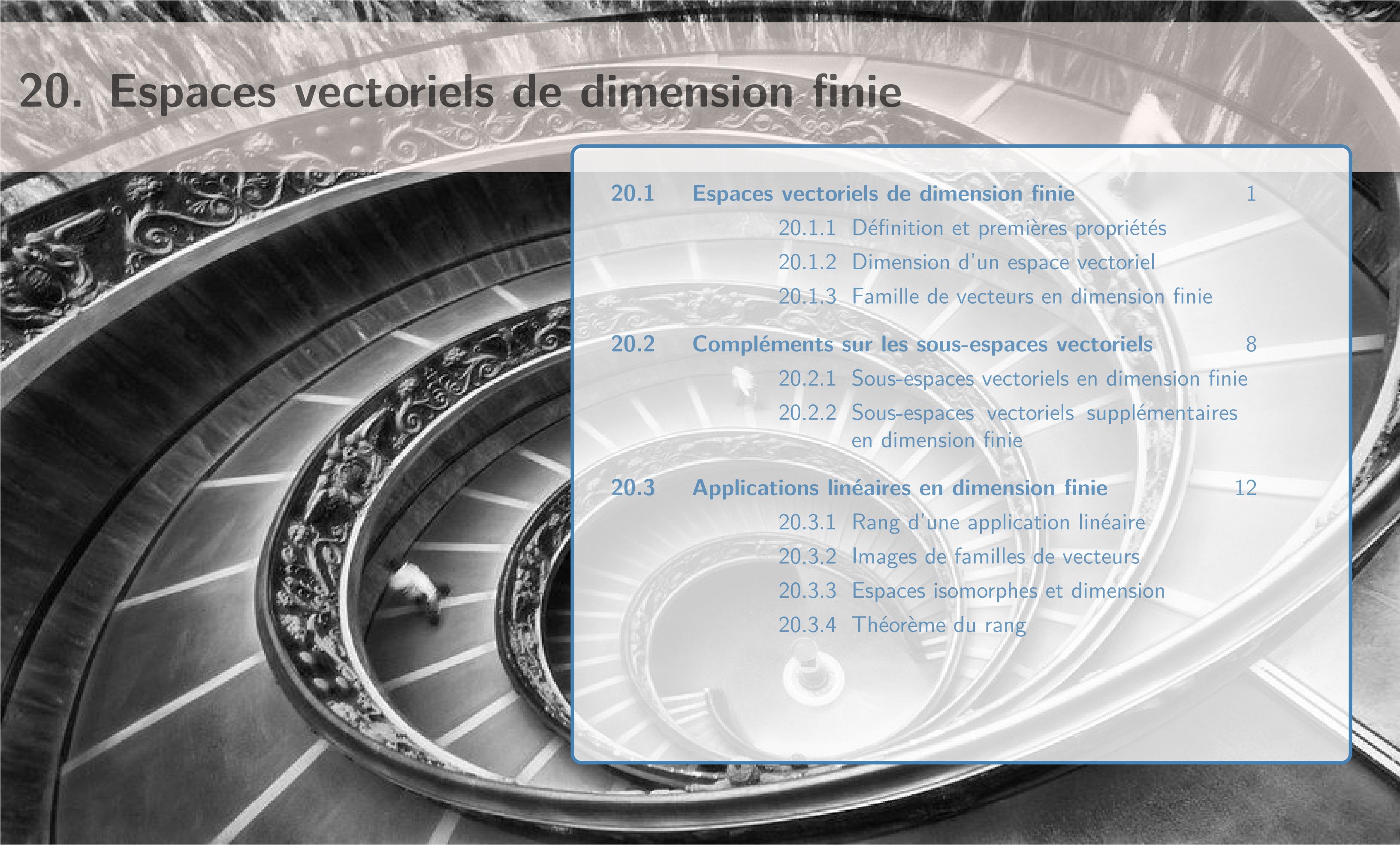

20. Espaces vectoriels de dimension finie

Il semble que ce soit le destin de Grassmann d'être redécouvert de temps en temps, à chaque fois comme s'il avait été pratiquement oublié.

Albert C. Lewis

Ce chapitre est probablement le plus important de l'année en algèbre linéaire. Il est la base du cours de deuxième année dans ce domaine. Nous allons y étudier des espaces vectoriels particuliers dits de dimension finie. Les connaissances mathématiques sur ces espaces sont très denses et de nombreux résultats résultent de la notion de dimension. Nous verrons également les conséquences de la dimension finie sur les applications linéaires et découvrirons enfin le Théorème du rang.

20.1 Espaces vectoriels de dimension finie

20.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 20.1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit que E est un **espace vectoriel de dimension finie** lorsqu'il admet une famille génératrice comportant un nombre fini d'éléments, i.e. lorsqu'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de vecteurs de E tels que

$$E = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Remarque :

- *Par convention, $E = \{0_E\}$ est un espace vectoriel de dimension finie.*
- *Si E n'est pas de dimension finie, on dit qu'il est de dimension infinie.*

Exemple 20.1 On a déjà rencontré notamment :

- $\mathbb{R}^n$ espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ avec $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ le 1 étant en i-ème position
- $\mathbb{R}_n[x]$ espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique $(1, x, x^2, \dots, x^n)$
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ avec $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ le 1 étant en i-ème position
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension infinie
- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un espace vectoriel de dimension infinie.

Théorème 20.1 Tout espace vectoriel E de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$ admet au moins une base.

Démonstration. Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et de dimension finie. Alors il possède une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments $\mathcal{F} = \left(e_1, e_2, \dots, e_q\right)$, avec $q \in \mathbb{N}^*$. Alors

- Si $\mathcal{F}$ est libre, c'est une base de E.
- Si $\mathcal{F}$ n'est pas libre alors il existe au moins un vecteur de $\mathcal{F}$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire des autres. On peut alors le retirer sans perdre le caractère générateur de la famille. Quitte à ré-indexer les éléments de $\mathcal{F}$, on suppose qu'il s'agit de e_q. Donc $\mathcal{F}_1 = \left(e_1, e_2, \dots, e_{q-1}\right)$ est génératrice de E. Si $\mathcal{F}_1$ est libre, alors c'est une base de E.
- Sinon l'un des vecteur de $\mathcal{F}_1$ s'écrit comme une combinaison linéaire des autres et on peut le retirer à son tour. Quitte à ré-indexer, on montre alors que $\mathcal{F}_2 = \left(e_1, e_2, \dots, e_{q-2}\right)$ est génératrice de E.

Par un nombre fini d'itérations successives de ce raisonnement (on est sûr qu'il termine car une famille contenant un seul élément non nul est toujours libre), on obtient une famille $\mathcal{F}_m = \left(e_1, e_2, \dots, e_{q-m}\right)$ qui est génératrice de E et libre, On a donc une base de E. □

20.1.2 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 20.2 **(Admis)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E alors

$$\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{G}).$$

Remarque : Cela implique que si il existe une famille génératrice de E de cardinal n alors toute famille de cardinal $n+1$ est liée.

Théorème 20.3 **(Dimension d'un espace vectoriel)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Cet entier naturel est appelé la dimension de l'espace vectoriel et est noté $\dim(E)$.

Remarque : Si $E = \{0_E\}$, on pose par convention $\dim(E) = 0$. Si E est un espace vectoriel de dimension infinie, on pose $\dim(E) = +\infty$.

Démonstration. Soient n et p deux entiers naturels non nuls et soient $\mathcal{B}_1 = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ deux bases de E. Alors:

- $\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ est génératrice de E donc $p \geqslant n$.
- $\mathcal{B}_2$ est libre et $\mathcal{B}_1$ est génératrice de E donc $n \geqslant p$.

Ainsi $n = p$. □

Méthode 20.1 **(Déterminer la dimension d'un espace vectoriel)** Pour trouver la dimension d'un espace vectoriel, il suffit d'en exhiber une base et de calculer son cardinal.

Exemple 20.2

1. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n donc une base est la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ avec $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ le 1 étant en i-ème position.
2. $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel de dimension n+1 donc une base est la base canonique $(1, x, x^2, \dots, x^n)$.
3. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension n donc une base est la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ avec $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ le 1 étant en i-ème position.

4. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension np dont une base est

$$E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1p}, E_{21}, \ldots, E_{2p}, \ldots, E_{k1}, \ldots, E_{kp}, \ldots, E_{n1}, \ldots E_{np})$$

avec E_{kl} la matrice constituée de 0 sauf un 1 en k-ème ligne et l-ème colonne.

<u>Remarque</u> : *Interprétation graphique*

- *Les visualisations géométriques planes correspondent à la dimension 2. Celles dans l'espace correspondent à la dimension* 3.
- *Finalement, la dimension d'un espace est le nombre de degrés de liberté dans le choix d'un élément, ou le nombre de paramètres à fixer pour caractériser totalement un élément.*

20.1.3 Famille de vecteurs en dimension finie

Corollaire 20.1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors:

- Toute famille libre $\mathcal{L}$ de E vérifie $\text{Card}(\mathcal{L}) \leqslant n$.
- Toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de E vérifie $\text{Card}(\mathcal{G}) \geqslant n$.
- Toute base $\mathcal{B}$ de E vérifie $\text{Card}(\mathcal{B}) = n$.

Théorème 20.4 (Base en dimension n) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de cardinal n. On a alors équivalence entre les trois assertions suivantes :

1. $\mathcal{B}$ est une base de E.
2. $\mathcal{B}$ est une famille libre de E.
3. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.

Méthode 20.2 (Pour montrer qu'une famille est une base) Si on travaille dans un espace vectoriel E dont on connaît la dimension $n \in \mathbb{N}^*$ alors pour montrer qu'une famille de cardinal n est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre **ou** génératrice de E.
Dans la pratique, il est souvent plus simple et plus rapide de montrer qu'elle est libre.

Exercice 20.1 Soient $u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, 0, 2)$ et $w = (2, 2, -1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La famille $\mathcal{B}$ est de cardinal 3 et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre pour obtenir le fait que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & 5\lambda_2 & - & 7\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. , \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & 4\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. , L_3 \leftarrow 2L_3 - 5L_2$$

On obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est donc libre et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20.2 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$. Soient $P = 1$, $Q = x + 1$ et $R = x^2 + x + 1$. Montrer que $\mathcal{B} = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

La famille $(P, Q, R$ est de cardinal 3 et $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, ainsi pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R = 0$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 + \lambda_2(x+1) + \lambda_3(x^2 + x + 1) = 0$$

soit :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0.$$

Par identification des coefficients, on obtient $\lambda_3 = 0$, $2\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est donc libre. Son cardinal étant égal à $\dim(\mathbb{R}_2[x])$, on en conclut que c'est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Définition 20.2 **(Rang d'une famille finie de vecteurs)** Soit E un espace vectoriel et soit $\left(f_1, f_2, \dots, f_p\right)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **rang** de la famille $\left(f_1, f_2, \dots, f_p\right)$ et on note $\mathrm{rg}\left(f_1, f_2, \dots, f_p\right)$ la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre ;

$$\mathrm{rg}\left(f_1, f_2, \dots, f_p\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(f_1, f_2, \dots, f_p\right)\right).$$

Exemple 20.3 Dans $\mathbb{R}_2[x]$,

- $\mathrm{rg}\left(x, x^2\right) = 2$ puisque $\left(x, x^2\right)$ forme une famille libre (c'est une sous-famille de la base canonique).
- $\mathrm{rg}\left(1, x+1, x, x^2\right) = \mathrm{rg}\left(1, x, x^2\right) = 3$ puisque $x+1$ est combinaison linéaire de x et de 1 et qu'ensuite la famille $\left(1, x, x^2\right)$ est libre.
- $\mathrm{rg}\left((x+1)^2, x^2\right) = 2$ puisque $\left((x+1)^2, x^2\right)$ forme une famille libre. En effet, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1(x+1)^2 + \lambda_2 x^2 = 0.$$

  On a alors en évaluant en 0 : $\lambda_1 = 0$ et en évaluant en 1 : $\lambda_2 = 0$. La famille est donc libre.

Proposition 20.1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\left(x_1, \ldots, x_p\right)$ une famille de vecteurs de $E\,(p \in \mathbb{N}^*)$. On a :

1. $\operatorname{rg}\left(x_1, \ldots, x_p\right) \leqslant p$ avec égalité ssi $\left(x_1, \ldots, x_p\right)$ est libre dans E.
2. $\operatorname{rg}\left(x_1, \ldots, x_p\right) \leqslant n$ avec égalité ssi $\left(x_1, \ldots, x_p\right)$ est génératrice de E.
3. Si $n = p$, $\operatorname{rg}\left(x_1, \ldots, x_p\right) = p$ ssi $\left(x_1, \ldots, x_p\right)$ est une base de E.

<u>Remarque</u> : On ne modifie pas le rang d'une famille de vecteurs lorsque :

- *on retire le vecteur nul de la famille si celui-ci y apparait,*
- *on permute les vecteurs de la famille,*
- *on multiple un vecteur par un scalaire $\lambda \neq 0$.*
- *on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres.*

Méthode 20.3 (Déterminer le rang d'une famille de vecteurs) Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on utilise les 4 opérations précédentes pour réduire pas à pas la famille jusqu'à en extraire une famille libre. Le rang de la famille de vecteurs est donc égal au cardinal de la famille libre extraite.
Cette méthode peut faire penser à l'algorithme du pivot de Gauss.

Exercice 20.3 Déterminer le rang de la famille (u, v, w, x) de $\mathbb{R}^4$ définie par $u = (1, 1, 1, 0)$, $v = (2, 4, 0, 1)$, $w = (1, 3, -1, 1)$ et $x = (3, 7, -1, 2)$.

$$\begin{array}{rl} u = & (1,\ 1,\ 1,\ 0) \\ v = & (2,\ 4,\ 0,\ 1) \\ w = & (1,\ 3,\ -1,\ 1) \\ x = & (3,\ 7,\ -1,\ 2) \end{array} \quad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{array} \iff \begin{array}{l} (1,\ 1,\ 1,\ 0) \\ (0,\ 2,\ -2,\ 1) \\ (0,\ 2,\ -2,\ 1) \\ (0,\ 4,\ -4,\ 2) \end{array} \quad \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array}$$

On a : $\operatorname{rg}(u, v, w, x) = \operatorname{rg}(u_1, v_1, w_1, x_1) = \operatorname{rg}(u_1, v_1)$ car $w_1 = v_1$ et $x_1 = 2v_1$. Or la famille (u_1, v_1) est libre car les deux vecteurs u_1 et v_1 ne sont pas colinéaires. La famille (u_1, v_1) est donc de rang 2.
On conclut que $\operatorname{rg}(u, v, w, x) = 2$.

Théorème 20.5 (Base incomplète) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{L} = \left(e_1, e_2, \ldots, e_p\right)$ une famille libre de E de cardinal $p \in [\![1, n]\!]$. Alors la famille $\mathcal{L}$ peut-être complétée par $n-p$ vecteurs $e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n$ de E pour former une base de E.

Démonstration. On a plusieurs cas :

- Si $\mathcal{L}$ est génératrice, c'est une base de E (et $p = n$).
- Si $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice alors il existe au moins un vecteur $x \in E$ qui ne s'écrit pas comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$.
  On montre alors que $\mathcal{L}_1 = \left(e_1, e_2, \ldots, e_p, x\right)$ est une famille libre. Soit $\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda\right) \in \mathbb{R}^{p+1}$, on suppose que :
  $$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \lambda x = 0_E$$
  Si $\lambda \neq 0$, $\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = x$, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $\lambda = 0$. Puis, comme $\mathcal{L}$ est libre, les λ_i sont tous nuls. Donc $\mathcal{L}_1$ est libre.
- Si $\mathcal{L}_1$ est génératrice, alors c'est une base de E.
- Sinon l'un des vecteur $y \in E$ ne s'écrit pas comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$. On pose alors $\mathcal{L}_2 = \left(e_1, e_2, \ldots, e_p, x, y\right)$ et on itère le raisonnement précédent.
- Par un nombre fini d'itérations successives (une famille libre ne peut pas être de cardinal strictement supérieur à $n = \dim(E)$), on obtient une famille $\mathcal{L}_m$ qui est génératrice de E et libre. Donc $\mathcal{L}_m$ est une base de E, qui complète $\mathcal{L}$.
  On a alors $\text{Card}\left(\mathcal{L}_m\right) = \dim(E) = n$, ce qui signifie qu'on a rajouté $n-p$ éléments à $\mathcal{L}$.

□

Exemple 20.4 Compléter $(x+2, x+1)$ en une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Ajouter des vecteurs de la base canonique de l'espace considéré est généralement un bon moyen de compléter une famille libre. Essayons $\left(x+2, x+1, x^2, x^3\right) = (P_1, P_2, P_3, P_4)$. Cette famille est de cardinal $4 = \dim(\mathbb{R}_3[x])$. Il nous faut donc montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0$. Soit $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1(x+2) + \lambda_2(x+1) + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 = 0$$

soit

$$2\lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^3 = 0$$

Soit par identification des coefficients, $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = 0$. On en déduit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. La famille est bien libre.

20.2 Compléments sur les sous-espaces vectoriels

20.2.1 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème 20.6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-espace vectoriel de E alors G est un espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim(G) \leqslant \dim(E).$$

De plus, si $\dim(G) = \dim(E)$, on a $G = E$.

Méthode 20.4 **(Egalité de deux espaces vectoriels)** Pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux, on peut montrer que **l'un est inclus dans l'autre** et montrer qu'ils ont la **même dimension**. C'est parfois plus facile que de raisonner par double inclusion.

Exercice 20.4 Montrer que $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) = \mathrm{Vect}((1,2,0),(2,3,0))$.

On note $E = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ et $F = \mathrm{Vect}((1,2,0),(2,3,0)) = \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$.
On remarque que $f_1 = e_1 + 2e_2$ donc $f_1 \in E$ et $f_2 = 2e_1 + 3e_2 \in E$. Ainsi $F \subset E$. De plus, les familles (e_1,e_2) et (f_1,f_2) sont libres donc $\dim(E) = \dim(F) = 2$. On en conclut que $E = F$.

Définition 20.3 **(Droites, plans et hyperplans vectoriels)** On appelle :

- **droite vectorielle** tout espace ou sous-espace vectoriel de **dimension 1**.
- **plan vectoriel** tout espace ou sous-espace vectoriel de **dimension 2**.

De plus, si E est un espace vectoriel de dimension n, on appelle **hyperplan de** E tout sous-espace vectoriel de **dimension** $n-1$.

Exemple 20.5

- $\mathrm{Vect}((1,1))$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est aussi un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20.5 On note $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ est une droite vectorielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$. Alors $a = d = 0$ et $-b = c$. Donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ étant antisymétrique, elle forme une famille génératrice de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$. Puisqu'elle est non nulle, c'est une famille libre. On a donc trouvé une base de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ à 1 élément. Ainsi $\dim(\mathcal{A}_2(\mathbb{R})) = 1$, c'est donc une droite vectorielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est une hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Alors $b = c$. Donc

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ étant symétriques, elles forment une famille génératrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
Montrons maintenant la liberté: soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, on suppose que

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et par identification des coefficients $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est donc libre et c'est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ à 3 éléments. Donc $\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = 3$. Comme $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, on en conclut que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

20.2.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires en dimension finie

Proposition 20.2 (Existence d'un supplémentaire en dimension finie) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E alors F admet un sous-espace vectoriel supplémentaire G dans E.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de F. Cette famille est libre dans E, donc par le théorème de la base incomplète on peut la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ de E. Montrons que $G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ est un supplémentaire de F dans E.

- Il est évident par construction de G que $F + G \subset E$. Par ailleurs, soit $x \in E$. Comme $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ est une base de E, il existe des scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i$$

Or $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in F$ et $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in G$ (par définition de G). Donc $x \in F + G$, et $E \subset F + G$. On en déduit par double inclusion que $E = F + G$.

- Il reste à montrer que la somme est directe. Soit $x \in F \cap G$. Comme $x \in F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. Et comme $x \in G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$, il existe $(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ tels que $x = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i$. En soustrayant ces deux égalités, on trouve

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i - \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E.$$

  Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre (c'est une base), on en déduit que tous les λ_i sont nuls. Donc $x = 0_E$, et $F \cap G = \{0_E\}$.

Donc $E = F \oplus G$. □

Attention ! Il y a existence du supplémentaire mais pas unicité.

Proposition 20.3 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E de dimension finie. On peut alors construire une base de E en concaténant une base de F et une base de G. En particulier, on a :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

Théorème 20.7 (Formule de Grassman) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G_1 et G_2 deux sous-espaces vectoriels quelconques de E alors

$$\dim(G_1 + G_2) = \dim(G_1) + \dim(G_2) - \dim(G_1 \cap G_2).$$

Théorème 20.8 (Caractérisation de deux sev supplémentaires) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E i.e. $E = F \oplus G$
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$,
3. $E = F + G$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$,
4. Si $\mathcal{B}_1$ est une base de F et $\mathcal{B}_2$ est une base de G, la famille $\mathcal{B}$ obtenue en juxtaposant les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et ceux de $\mathcal{B}_2$ est une base de E.

Méthode 20.5 (Construire un supplémentaire) Pour construire un supplémentaire à un sous-espace vectoriel F, il suffit de compléter une base de F en une base de E et de considérer G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs ajoutés.

Exemple 20.6 Déterminer un supplémentaire de $F = \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.

Les vecteurs $(1,1,1)$ et $(0,1,1)$ n'étant pas colinéaires, ils sont libres et ils forment une base de F. On complète cette base de F en une base de E en ajoutant à cette famille le vecteur $(0,0,1)$. Montrons que la famille $((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$ est libre.
Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(0,1,1)+\lambda_3(0,0,1) = (0,0,0).$$

On obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

On en déduit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est bien libre. Comme elle est de cardinal 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Posons $G = \mathrm{Vect}((0,0,1))$. Comme $(0,0,1) \neq (0,0,0)$ c'est une base de G. Or juxtaposer une base de F et une base de G donne une base de $\mathbb{R}^3$, donc G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20.6 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1) = 0\}$.
Déterminer un supplémentaire à F dans $\mathbb{R}_2[x]$.

- On commence par chercher une base de F. Soit $P \in F$, alors il existe des réels a, b, c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$. Comme $P(1) = 0$, on a $a + b + c = 0$. Donc

  $$P(x) = ax^2 + bx - a - b = a\left(x^2 - 1\right) + b(x - 1).$$

  Comme $x^2 - 1 \in F$ et $x - 1 \in F$, ces deux vecteurs forment une famille génératrice de F. Montrons que cette famille est également libre.
  Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que

  $$\alpha\left(x^2 - 1\right) + \beta(x - 1) = 0.$$

  Alors $\alpha x^2 + \beta x - \alpha - \beta = 0$ et par identification des coefficients, $\alpha = \beta = 0$. Donc la famille est libre.
  Ainsi $\left(x^2 - 1, x - 1\right)$ est une base de F.

- Complétons cette base en une base de $\mathbb{R}_2[x]$, par exemple, en lui ajoutant un vecteur de la base canonique : 1.
  Montrons que la famille obtenue est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que

  $$\alpha\left(x^2 - 1\right) + \beta(x - 1) + \gamma = 0.$$

  Alors $\alpha x^2 + \beta x - \alpha - \beta + \gamma = 0$, et par identification des coefficients, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc $\left(x^2 - 1, x - 1, 1\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$. Comme c'est une famille à 3 éléments et que $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, c'est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

- On pose $G = \mathrm{Vect}(1)$. $1 \neq 0$ est une base de G. Or juxtaposer une base de F et une base de G donne une base de $\mathbb{R}_2[x]$, donc G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[x]$.

20.3 Applications linéaires en dimension finie

20.3.1 Rang d'une application linéaire

Proposition 20.4 Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une de ses bases. Alors une application linéaire f de E dans F est définie de manière unique par la donnée de la famille :

$$(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Exemple 20.7 Déterminer l'unique application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $f((1,0)) = (2,1)$ et $f((0,1)) = (1,1)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la linéarité de f donne:

$$f((x,y)) = f(x(1,0) + y(0,1)) = xf((1,0)) + yf((0,1)) = x(2,1) + y(1,1) = (2x+y, x+y).$$

Définition 20.4 (Rang d'une application linéaire) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel. Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle rang de f, et on note $\mathrm{rg}(f)$ la valeur :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Remarque :

- *Rappelons une Proposition vue dans le Chapitre 16.*
  Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E admet une famille génératrice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

  En particulier, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ et on a

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

- *La fonction nulle est la seule application de rang 0.*

Exemple 20.8 Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$. Calculer le rang de f.

Les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f((1,0)), f((0,1))) = \mathrm{Vect}((4,2), (-6,-3)).$$

Or $(-6,-3) = -\frac{3}{2}(4,2)$ donc $\mathrm{Vect}((4,2),(-6,-3)) = \mathrm{Vect}((4,2))$. Comme $(4,2) \neq (0,0)$, c'est une famille libre et donc $\mathrm{rg}(f) = 1$.

20.3.2 Images de familles de vecteurs

Exercice 20.7 Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

1. Supposons que f est injective, montrer que l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F.

   Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre de E, et f une application linéaire injective de E dans F. Montrons que $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une famille libre de F.
   Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$, on suppose que
   $$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(e_i)=0_F.$$
   On a alors, par linéarité de f, $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right)=0_F$, i.e. $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\in\mathrm{Ker}(f)$.
   Comme f est injective, $\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$, ce qui nous donne $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i=0_E$. Et comme $(e_1,\dots e_n)$ est une famille libre de E, les λ_i sont tous nuls.
   Ainsi $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est libre dans F.

2. Supposons que f est surjective, montrer que l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

   Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille génératrice de E et f une application linéaire surjective. Soit $y\in F$. Comme f est surjective, $y\in\mathrm{Im}(f)$ et il existe $x\in E$ tel que $f(x)=y$. Et comme $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice de E, il existe $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que
   $x=\sum_{i=1}^{n}x_1 e_i$. Ce qui donne, en utilisant la linéarité de f,
   $$y=f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(e_i).$$
   Or $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $f(e_i)\in F$. Ainsi la famille $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est génératrice de F.

Proposition 20.5 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$ et f une application linéaire de E dans F alors

- si f est bijective, l'image par f de toute base de E est une base de F.
- S'il existe une base de E dont l'image par f est une base de F alors f est bijective.

Démonstration. Le premier point résulte des propriétés démontrées dans l'Exercice 20.7. □

20.3.3 Espaces isomorphes et dimension

Proposition 20.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Montrons ce résultat par double implication.
($\Rightarrow$) Soit E un espace vectoriel de dimension n alors il possède une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit φ l'application linéaire qui a tout e_i associe le i-ème terme de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'application φ est linéaire par construction et l'image de la base $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc par la Proposition 20.5, elle est bijective. Donc E est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
($\Leftarrow$) Soit E un espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc un isomorphisme φ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans E. Comme φ est bijective, l'image par φ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une base de E. Donc E possède une base à n éléments et $\dim(E) = n$. □

Corollaire 20.2 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, ils sont isomorphes si et seulement si
$$\dim(E) = \dim(F).$$

<u>Remarque</u> : Les résultats précédents nous fournissent une nouvelle méthode pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel. En effet, pour calculer la dimension d'un espace vectoriel E, on peut montrer qu'il est isomorphe à un espace vectoriel F dont on connaît la dimension (en exhibant l'isomorphisme).

Exercice 20.8 Soient $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$ et $T = E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par
$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \quad T(u) = (u_0, u_1).$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
   On a :
   - $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles
   - La suite nulle appartient à E car elle vérifie trivialement la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $E \neq \emptyset$.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $((u_n)_n, (v_n)_n) \in E^2$, montrons que $\lambda(u_n)_n + (v_n)_n \in E$.
     On pose la suite $(w_n)_n = \lambda(u_n)_n + (v_n)_n$, on a :
     $$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= \lambda(u_{n+1} + 2u_n) + v_{n+1} + v_n \quad \text{car } ((u_n)_n, (v_n)_n) \in E^2 \\ &= \lambda u_{n+1} + v_{n+1} + (\lambda u_n + v_n) \\ &= w_{n+1} + 2w_n \end{aligned}$$
     Ainsi $(w_n)_n \in E$.

   Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et est donc un espace vectoriel.

2. Montrer que T est un isomorphisme. En déduire la dimension de E.

Montrons que l'application linéaire T est linéaire et bijective.
Linéarité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u,v) \in E^2$, on a :

$$T(\lambda u+v) = (\lambda u_0+v_0, \lambda u_1+v_1) = (\lambda u_0, \lambda u_1)+(v_0, v_1) = \lambda(u_0, u_1)+(v_0, v_1) = \lambda T(u)+T(v).$$

Ainsi l'application T est bien linéaire.
Bijectivité : Commençons par caractériser autrement les éléments de E. On a :

$$u \in E \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Cherchons donc l'expression des suites vérifiant cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Commençons par résoudre l'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$. On obtient :

$$\Delta = 5 \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Il existe alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Il reste alors à déterminer λ et μ en fonction de u_0 et u_1. Pour cela on évalue l'égalité précédente en 0 et en 1 et n obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda & + & \mu & = & u_0 \\ \lambda r_1 & + & \mu r_2 & = & u_1 \end{cases}$$

On résout ce système et on obtient :

$$\lambda = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}.$$

Les éléments de E s'écrivent donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1}\right) r_1^n + \left(\frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}\right) r_2^n.$$

Montrons maintenant que T est injective. Soit $u \in \mathrm{Ker}(T)$, on a donc $T(u) = 0$ soit $(u_0, u_1) = (0, 0)$. La suite u vérifie donc $u_0 = u_1 = 0$. En remplaçant dans l'expression qu'on vient de déterminer, on obtient que $u_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ et l'application T est bien injective.
Montrons que T est également surjective. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $u \in E$ tel que $T(u) = (x,y)$. Posons

$$\lambda = \frac{r_2 x - y}{r_2 - r_1}, \quad \mu = \frac{y - r_1 x}{r_2 - r_1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

On a alors $u_0 = x$ et $u_1 = y$ et par construction la suite $u \in E$. Ainsi $T(u) = (x,y)$ et T est bien surjective.
T est linéaire, injective et surjective, c'est donc un isomorphisme. On en déduit que $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

20.3.4 Théorème du rang

Théorème 20.9 Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On suppose que E est de dimension finie alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

Démonstration. $\mathrm{Ker}(f)$ est inclus dans E qui est de dimension finie donc c'est également un espace de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ (dans le cas où $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$). C'est une famille libre de E, donc (théorème de la base incomplète) on peut la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E (si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, on prend directement une base de E). On sait alors que $(f(e1), ..., f(en))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Et comme $f(e1) = \ldots = f(ek) = 0_F$ (ces éléments étant dans le noyau de f), on obtient que $(f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Il nous reste maintenant à montrer que cette famille est libre pour pouvoir conclure que c'est une base. Soit $(\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ tels que :

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F.$$

Comme f est linéaire, on en déduit que :

$$f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F$$

donc $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que :

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i,$$

soit

$$\sum_{i=1}^{k} (-\alpha_i) e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = 0.$$

Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, et en particulier une famille libre, on en déduit que tous les λ et α_i sont nuls.
On a donc montré que $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, et $(f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Ce qui nous donne que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = k$, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n-k$ et en particulier :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

$\square$

Exercice 20.9 On considère l'endomorphisme $\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y+z \\ y-x \\ 2x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$.

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$, on a alors $f(X) = 0$, on obtient alors le système :

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & z & = & 0 \\ & & -3y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2y - z = y \\ z & = & -3y \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ -3y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ainsi la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ et elle est libre car elle contient un unique vecteur non nul. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
D'après le théorème du rang, on a :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2.$$

On doit donc trouver une base de cardinal 2.
On sait que $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. On a :

$$(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On remarque que $f(e_1) + f(e_2) = 3f(e_3)$, ainsi la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ comme elle est de cardinal 2, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 20.7 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et f une application linéaire de E dans F alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective} \iff \mathrm{rg}(f) = \dim(F).$$

Démonstration. Le théorème du rang donne

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) = \dim(F).$$

En particulier,

- Si f est injective alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$. Or $\mathrm{Im}(f) \subset F$ donc $\mathrm{Im}(f) = F$ et f est surjective.
- Si f est surjective alors $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ i.e. $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et f est injective. Ainsi f est bijective.
- Si f est bijective alors $\mathrm{Im}(f) = F$ et donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.
- Si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$ alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ i.e. $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et f est injective.

□

Méthode 20.6 **(Pour montrer que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme)** En dimension finie et dans le cas où $\dim(E) = \dim(F)$, pour montrer que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective **ou** surjective.
Souvent on choisira de montrer l'injectivité en utilisant la caractérisation par le noyau.

Lorsque f est un endomorphisme, l'égalité des dimensions est forcément vraie.

Exercice 20.10 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui à (x,y,z) associe $(y+z, z+x, x+y)$. Montrer que f est bijectif.

Montrons pour cela que f est injective. Soit $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$, on a donc $f((x,y,z)) = (0,0,0)$. On obtient alors un système :

$$(\mathcal{S}) \left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S}) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{cccccc} x & & + & z & = & 0 \\ & y & + & z & = & 0 \\ & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{cccccc} x & & + & z & = & 0 \\ & y & + & z & = & 0 \\ & & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient alors $z = 0$, $y = 0$ et $x = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. f est donc injective et comme c'est un endomorphisme, on conclut que f est bijective grâce au théorème du rang.

Exercice 20.11 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim(E) = \dim(F)$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $v \circ u = Id_E$. Montrer que u et v sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Essayons de montrer que u est bijective.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$ alors $(v \circ u)(x) = x$ soit $v(u(x)) = x$ soit $v(0_F) = x$ soit $0_E = x$ par linéarité donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et u est injective. Comme $\dim(E) = \dim(F)$, on en déduit que u est bijective. En composant l'égalité $v \circ u = Id_E$ par u^{-1} on obtient que $u^{-1} = v$.

Proposition 20.8 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et ϕ une forme linéaire non nulle de E alors le noyau de ϕ est un hyperplan de E.

Démonstration. On rappelle qu'une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
Comme ϕ est une forme linéaire non nulle, $\mathrm{Im}(\phi) \neq \{0\}$ et donc $\mathrm{rg}(\phi) \geqslant 1$.
De plus, $\mathrm{rg}(\phi) \leqslant \dim(\mathbb{R}) = 1$ donc $\mathrm{rg}(\phi) = 1$. D'après le théorème du rang, on a alors:

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(\phi)) + 1,$$

ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = \dim(E) - 1$ et $\mathrm{Ker}(\phi)$ est bien un hyperplan de E. □

Exercice 20.12 Montrer que l'ensemble des polynômes de degré au plus n admettant 1 pour racine est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[x]$.

On définit l'application $f : \mathbb{R}_n[x] \longmapsto \mathbb{R}$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$f(P) = P(1).$$

L'application f est une forme linéaire, en effet : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$, on a :

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda f(P) + f(Q).$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[x]$. Or :

$$Ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \mid P(1) = 0\}$$

i.e. l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ admettant 1 pour racine.