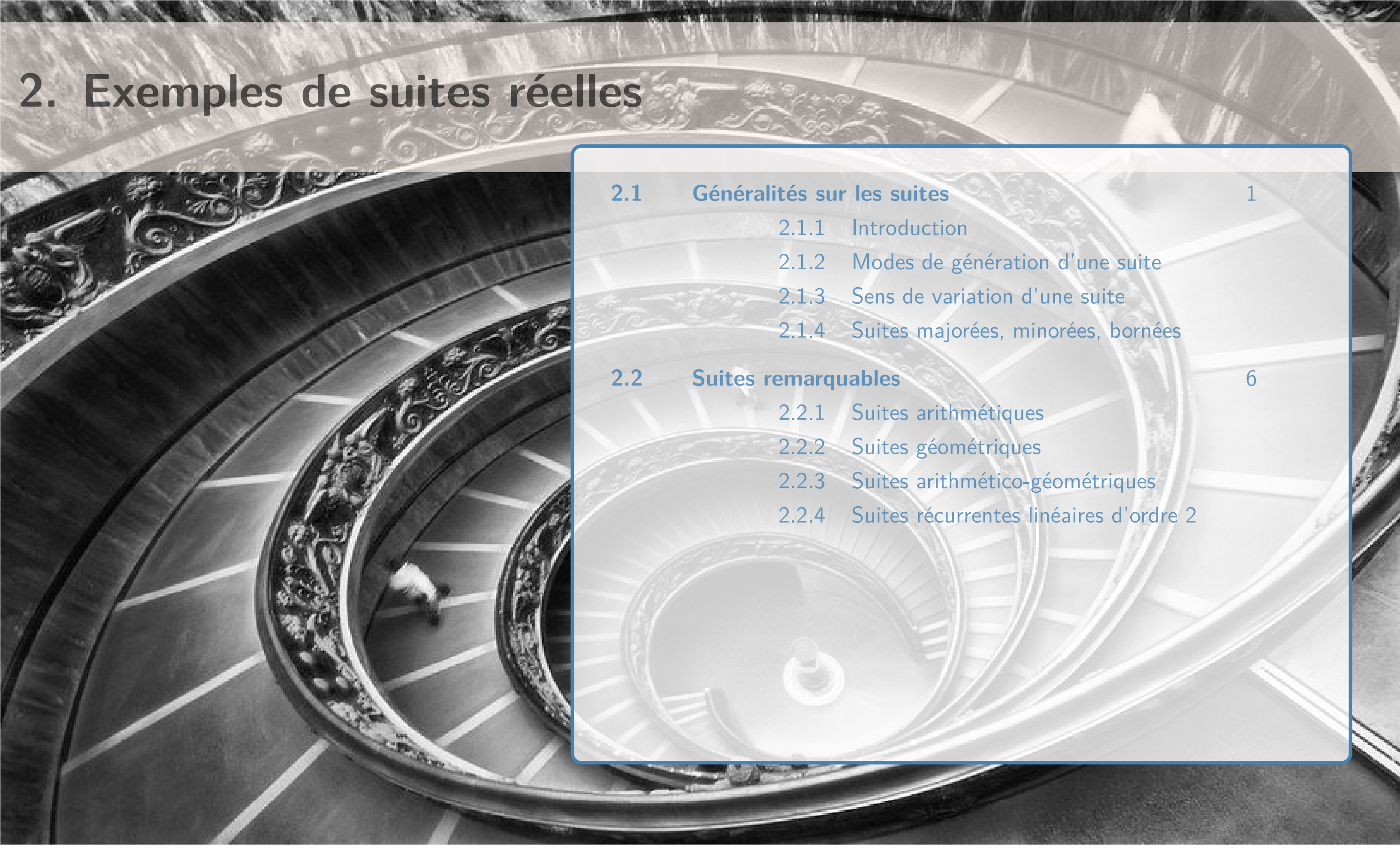


# 2. Exemples de suites réelles



L'égalité n'est rien d'autre qu'un concept nécessaire aux mathématiques. Citez-moi une seule chose, sur cette terre, qui soit égale à une autre.

*Gabriel Bréard*

*Dans ce chapitre, on s'intéresse aux suites réelles, c'est à dire aux suites à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Ce chapitre est le prolongement et l'approfondissement de l'étude des suites qui a été initiée au lycée. La majeure partie du chapitre sera consacrée à l'étude de suites particulières. Nous reviendrons dans le Chapitre 7 sur des propriétés plus générales des suites.*

## 2.1 Généralités sur les suites

### 2.1.1 Introduction

Intuitivement, une suite réelle est une liste (infinie) de nombres réels. Par exemple, la liste (en ordre croissant) des puissances de 2 est une suite:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots$$

On convient usuellement de poser $u_0 = 1$, puis $u_1 = 2$, puis $u_2 = 4$, etc.
D'autres choix sont tout à fait possibles: on peut poser $v_1 = 1$, puis $v_2 = 2$, puis $v_3 = 4$, etc.
On peut également poser $w_5 = 1$, puis $w_6 = 2$, puis $w_7 = 4$, etc.
La suite notée $(u_n)$ est donc une fonction $u$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. De même, la suite $(v_n)$ est une fonction $v$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$. Enfin, la suite $(w_n)$ est une fonction $w$ de $[\![5;+\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$.

**Définition 2.1**

- Une **suite réelle** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{cccc} u & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

On note cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou encore $(u_n)$ (ou parfois seulement $u$).

- $u_n$ est appelé **terme général** d'indice $n$ (ou de rang $n$).

*Remarque : Parfois, les suites ne sont définies que sur une partie infinie $I$ de $\mathbb{N}$. Par exemple, la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \sqrt{n-2}$ n'est définie que pour $n \geqslant 2$. On dira alors que $(u_n)_n$ est définie sur $I = [\![2;+\infty[\![$ et on notera la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.*

**Attention !** Pour une rédaction rigoureuse, on distinguera bien $u_n$ qui est un nombre car c'est le terme de rang $n$ de la suite et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est la suite elle-même.
C'est la même chose que de ne pas confondre la fonction $f$ et réel $f(x)$.

**Exemple 2.1** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2 - 1$.

- Le premier terme est : $u_0 = -1$.
- Le deuxième terme est : $u_1 = 0$.
- Le troisième terme est : $u_2 = 3$.
- Le terme de rang $n$ est : $u_3 = 8$.

### 2.1.2 Modes de génération d'une suite

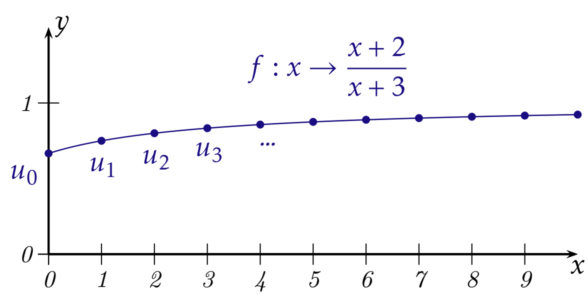
**a) en définissant explicitement le terme général d'indice $n$ :**

**Exemple 2.2** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{n+2}{n+3}.$$

Autrement dit, on se donne l'expression d'une fonction $f$ telle que: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(n)}$.
Dans l'exemple, on a : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$.

*Remarque : On peut représenter graphiquement, comme ci-contre, les termes de la suite.*



**b) en définissant un terme à l'aide du terme précédent.**

On dit qu'on définit la suite *par récurrence.*

**Exemple 2.3** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = -10 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

Autrement dit, on se donne l'expression d'une fonction $f$ définie sur un intervalle $J$ vérifiant $f(J) \subseteq J$ telle que:

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Dans l'exemple, on a $f(x) = x + 3.$

<u>*Remarque*</u> *: Pour calculer $u_{1000}$ pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence, il faut donc* a priori *calculer tous les termes $u_1$, $u_2$, ..., $u_{999}$. C'est pourquoi il sera intéressant d'obtenir une expression du terme général $u_n$ en fonction de $n$ dans les exercices sur les suites.*

**Exemple 2.4**

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. On a :

$$u_7 = 2 \times 7^2 - 3 \times 7 + 1 = 78.$$

- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = -2v_n + 3 \end{cases}$$

Calculer $v_4$. Pour calculer $v_4$, on doit d'abord calculer $v_1$, $v_2$ et $v_3$. On a
$v_1 = -2v_0 + 3 = -2 \times 3 + 3 = -3$, $v_2 = -2v_1 + 3 = -2 \times (-3) + 3 = 9$,
$v_3 = -2v_2 + 3 = -2 \times 9 + 3 = -15$, $v_4 = -2v_3 + 3 = -2 \times (-15) + 3 = 33$.

**c) en définissant un terme à l'aide des deux termes précédents :**

**Exemple 2.5** La (célèbre) suite de FIBONACCI $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} F_0 = 1 \qquad F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Les premiers termes de la suite sont $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$, etc.

On parle dans ce cas de *suite récurrente d'ordre 2.*

**d) la liste est loin d'être exhaustive !**

### 2.1.3 Sens de variation d'une suite

**Définition 2.2** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **strictement croissante** lorsque:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}.$$
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **strictement décroissante** lorsque:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}.$$
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** lorsque:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$$
4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** lorsque:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_{n+1}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

**Méthode 2.1 (Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante.)** Plusieurs méthodes sont possibles selon les cas.

- **Méthode 1** : Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. En effet, on a :
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ croissante si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$$
- **Méthode 2** : Lorsque tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1. En effet, *dans ce cas*, on a :
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ croissante si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1.$$
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1.$$
- **Méthode 3** : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(n)$, étudier la monotonie de $f$ sur $[0;+\infty[$.

**Exemple 2.6**

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2 + 3$ est strictement croissante.

   En effet, on a : $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3 - (n^2+3) = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1$. Or $n \in \mathbb{N}$ donc $2n + 1 \geqslant 1 > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ est strictement croissante :

   Nous avons $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n$ par : $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$ est strictement croissante :

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel $n$,

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2\times(n+1)}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} = 1 + \frac{n}{n+2}$$

   Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel $n$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \frac{3}{n+1}$ est strictement décroissante :

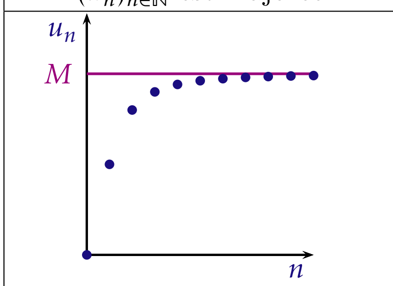
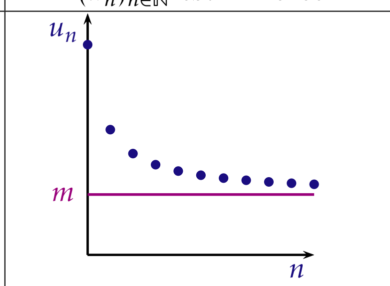
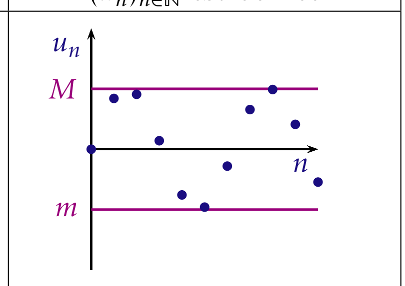
   Soit $f$ la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x+1}$. La fonction $f$ est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$ donc *a fortiori* sur $[0;+\infty[$, donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

### 2.1.4 Suites majorées, minorées, bornées

**Définition 2.3** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est à dire s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant u_n \leqslant M$.

Les graphiques ci-dessous illustrent ces différentes propriétés.

| $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée | $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée | $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée |
|---|---|---|
|   |   |   |

**Exemple 2.7** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n$ par $u_n = \dfrac{3n^2}{n^2+1}$ est majorée par 3. Pour tout entier $n$, on a :

$$u_n - 3 = \frac{3n^2}{n^2+1} - 3 = \frac{3n^2 - 3(n^2+1)}{n^2+1} = \frac{-3}{n^2+1}.$$

Or, $-3 < 0$ et $n^2+1 > 0$ donc $\dfrac{-3}{n^2+1} < 0$ . Autrement dit, $u_n - 3 < 0$ soit $u_n < 3$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien majorée par 3.

## 2.2 Suites remarquables

### 2.2.1 Suites arithmétiques

**Définition 2.4** Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** s'il existe un réel $r$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel $r$ est appelé **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre $r$ :

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 \arrow[r, bend left, "+r"] & \cdots \arrow[r, bend left, "+r"] & u_n \end{tikzcd}$$

**Exemple 2.8** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$. Ainsi, la suite $(u_n)$ est définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$$

$u_0 = 5$ donc $u_1 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$ donc $u_2 = u_1 - 2 = 3 - 2 = 1$ etc.

**Exercice type 2.1** Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

- la suite $(u_n)$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 + 5n$.

  Calculons les trois premiers termes de cette suite.

  $$u_0 = 3 + 5 \times 0 = 3, \qquad u_1 = 3 + 5 \times 1 = 8, \qquad u_2 = 3 + 5 \times 2 = 13.$$

  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *semble* arithmétique de raison $r = 5$. Démontrons cela par le calcul :

  $$u_{n+1} - u_n = 3 + 5(n+1) - (3 + 5n) = 3 + 5n + 5 - 3 - 5n = 5.$$

  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une suite arithmétique de raison $r = 5$.

- la suite $(v_n)$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = n^2 + 1$.

  Calculons les trois premiers termes de cette suite.

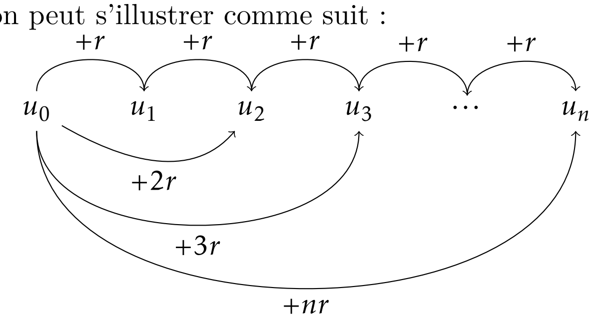
  $$v_0 = 0^2 + 1 = 1, \qquad v_1 = 1^2 + 1 = 2, \qquad v_2 = 2^2 + 1 = 5.$$

  On remarque que $v_1 - v_0 = 1 \neq v_2 - v_1 = 3$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique.

**Proposition 2.1** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Cette proposition peut s'illustrer comme suit :




*Remarque : On a également :*

$$u_n = u_1 + (n-1)r, \qquad u_n = u_2 + (n-2)r, \qquad \cdots \qquad u_n = u_p + (n-p)r.$$

**Proposition 2.2** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$. Notons $S_n$ la somme des $n+1$ premiers termes consécutifs de la suite $(u_n)$, à savoir $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ que l'on note aussi $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}.$$

*Remarque : Il peut être plus aisé de retenir la formule suivante :*

$$\textit{Somme [suite arithmétique]} = \frac{\textit{nombre de termes} \times (\textit{premier terme} + \textit{dernier terme})}{2}.$$

**Exemple 2.9** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$.
Alors: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5 - 2n$. Calculons $S_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} = \frac{(n+1)(5+5-2n)}{2} = \frac{(n+1)(10-2n)}{2} = (n+1)(5-n).$$

**Exercice 2.1** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$. *Résultat à connaître par* ♡

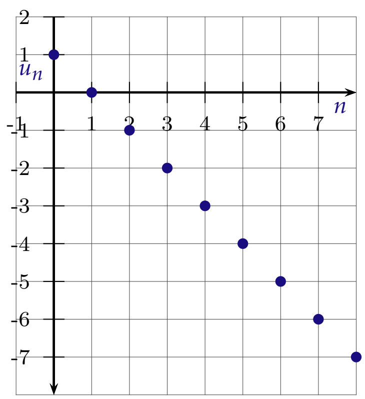
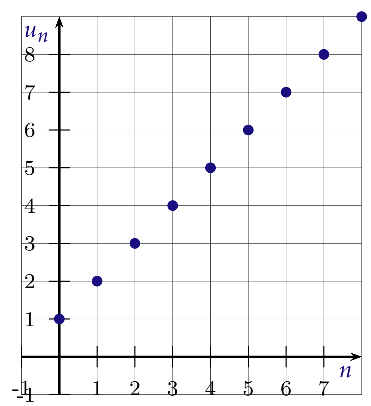
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

En effet, il s'agit des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 1$.

**Proposition 2.3** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$.

- Si $r > 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

*Démonstration.* Cela découle immédiatement du fait que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = r$. □

| Si $r \leqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. | Si $r \geqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. |
|---|---|
|   |   |

### 2.2.2 Suites géométriques

**Définition 2.5** Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** s'il existe un réel $q$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel $q$ est appelé **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre $q$ :

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 \arrow[r, bend left, "\times q"] & \cdots \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_n \end{tikzcd}$$

**Exemple 2.10** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Ainsi, la suite $(u_n)$ est définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n. \end{cases}$$

$u_0 = 2$ donc $u_1 = 3u_0 = 3 \times 2 = 6$ donc $u_2 = 3u_1 = 3 \times 6 = 18$ etc.

**Exercice type 2.2** Les suites suivantes sont-elles géométriques ?

- $(u_n)$ définie par: $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 4u_n + 1$.

  Calculons les trois premiers termes de cette suite.

  $$u_0 = 2, \qquad u_1 = 4u_0 + 1 = 4 \times 2 + 1 = 9, \qquad u_2 = 4u_1 + 1 = 4 \times 9 + 1 = 37.$$

  On a $\frac{u_1}{u_0} = \frac{9}{2} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{37}{9}$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique.

- $(v_n)$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{2\times 3^n}{5^{n+1}}$.

  Calculons les trois premiers termes de cette suite.

  $$v_0 = \frac{2 \times 3^0}{5^1} = \frac{2}{5}, \qquad v_1 = \frac{2 \times 3^1}{5^2} = \frac{6}{25}, \qquad v_2 = \frac{2 \times 3^2}{5^3} = \frac{18}{125}.$$

  On a $\frac{v_1}{v_0} = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{6}{25} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{5}$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{18}{125}}{\frac{6}{25}} = \frac{3}{5}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble donc géométrique de raison $\frac{3}{5}$. Démontrons cela par le calcul. Remarquons d'abord que pour tout $n$, $v_n \neq 0$, on peut donc écrire :

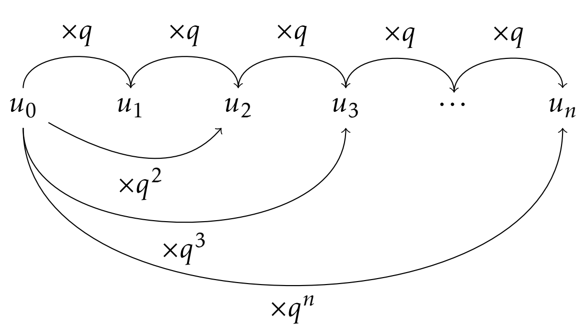
  $$\frac{v_{n+1}}{vn} = \frac{\frac{2\times 3^{n+1}}{5^{n+2}}}{\frac{2\times 3^n}{5^{n+1}}} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{5^{n+2}} \times \frac{5^{n+1}}{2 \times 3^n} = \frac{3}{5}.$$

  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{3}{5}$.

**Proposition 2.4** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n.$$

Cette proposition peut s'illustrer comme suit :




<u>*Remarque*</u> *: On a également :*

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}, \qquad u_n = u_2 \times q^{n-2}, \qquad \cdots \qquad u_n = u_p q^{n-p}.$$

**Proposition 2.5** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0$. Notons $S_n$ la somme des $n+1$ premiers termes consécutifs de la suite $(u_n)$, à savoir $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ que l'on note aussi $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

*Remarque : Il peut être plus aisé de retenir la formule suivante :*

$$\textit{Somme [suite géométrique]} = \textit{premier terme} \times \frac{1 - \textit{raison}^{\textit{nb de termes}}}{1 - \textit{raison}}.$$

**Exemple 2.11** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.
Alors: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n$. Calculons $S_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = 3^{n+1} - 1.$$

**Exercice 2.2** Calculer pour $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k$. *Résultat à connaître par ♡*

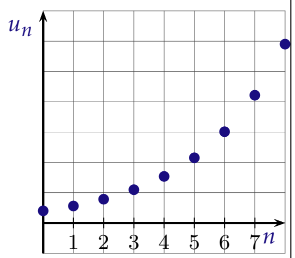
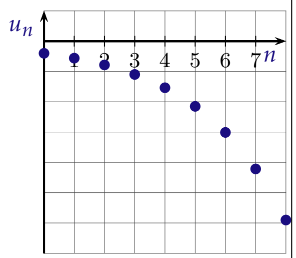
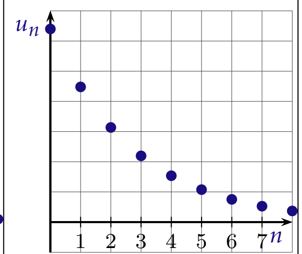
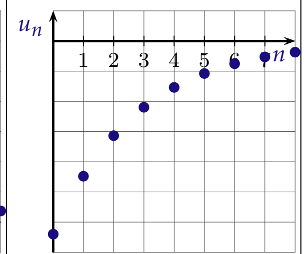
$$\forall q \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

En effet, il s'agit des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q$.

**Proposition 2.6** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$. Alors:

- Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, la suite $(u_n)$ est strictement décroissante. (c'est le contraire si $u_0 < 0$)
- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, la suite est strictement croissante. (c'est le contraire si $u_0 < 0$)
- Si $q < 0$, la suite n'est pas monotone.

Ces propriétés sont résumées par les graphiques ci-après.

<table>
<tr><th colspan="2">Si $q > 1$</th><th colspan="2">Si $0 < q < 1$</th></tr>
<tr>
<td>Si $u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)$ est croissante<br></td>
<td>Si $u_0 < 0$, alors la suite $(u_n)$ est décroissante<br></td>
<td>Si $u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)$ est décroissante<br></td>
<td>Si $u_0 < 0$, alors la suite $(u_n)$ est croissante<br></td>
</tr>
</table>

*Démonstration.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de $u_0$, $q^n$ et $(q-1)$.

- Si $q < 0$ alors $q^n$ est positif pour $n$ pair, négatif pour $n$ impair donc la suite n'est pas monotone.
- Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$ .

□

### 2.2.3 Suites arithmético-géométriques

**Définition 2.6** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b.$$

<u>Remarque</u> :

- *Si* $a = 1$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$.
  *Autrement dit,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique de raison* $b$.
- *Si* $b = 0$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n$.
  *Autrement dit,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $a$.
- *Si* $a = 0$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = b$.
  *Autrement dit,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite constante égale à* $b$.

**Exemple 2.12** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$$

Alors la suite $(u_n)$ est une suite arithmético-géométrique avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = 4$.

**Méthode 2.2 (Trouver l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique )** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de la forme $u_{n+1} = au_n + b$.
Pour exprimer $u_n$ en fonction de $n$, on procède selon les étapes suivantes :

1. On détermine l'unique réel $\alpha$ vérifiant $\alpha = a\alpha + b$ en résolvant l'équation.
2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_n - \alpha$ et on vérifie que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $a$.
3. On exprime $v_n$ en fonction de $n$ et on en déduit l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice type 2.3** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4. \end{cases}$$

Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

1. On commence par résoudre l'équation $x = \frac{1}{3}x + 4$. On a :

$$x = \frac{1}{3}x + 4 \Leftrightarrow x\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 4 \Leftrightarrow x = 6.$$

   On a donc $\alpha = 6$.

2. On pose $v_n = u_n - 6$. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Pour cela, on calcule :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(v_n + 6) - 2 = \frac{1}{3}v_n.$$

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

3. On en déduit son expression $v_n = v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n$ avec $v_0 = u_0 - 6 = 1 - 6 = -5$. On a donc $v_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n$. On en déduit l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$u_n = v_n - 6 = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6.$$

### 2.2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**Définition 2.7** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre** 2 s'il existe $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$ tels que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

*Remarque : pour définir parfaitement une suite récurrente linéaire d'ordre 2, on complète la formule de récurrence par la donnée des deux premiers termes de la suite.*

**Exemple 2.13** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 4 & u_1 = -6 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 2u_{n+1} + \frac{5}{6}u_n \end{cases}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Notre objectif est d'obtenir l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Définition 2.8** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On appelle **équation caractéristique** associée à la suite récurrente linéaire d'ordre 2 l'équation du second degré $r^2 = ar + b$.

**Exemple 2.14** L'équation caractéristique associée à la suite précédente est $r^2 = 2r + \frac{5}{6}$, ce qui équivaut à $r^2 - 2r - \frac{5}{6} = 0$.

**Théorème 2.1** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Notons $(E)$ son équation caractéristique associée.

- Si $(E)$ admet deux racines distinctes $r_1$ et $r_2$, alors le terme général de la suite peut s'écrire sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n.$$

  où $\lambda$ et $\mu$ sont des réels déterminés à l'aide des deux premiers termes de la suite.

- Si $(E)$ admet une racine réelle double $r_0$, alors le terme général de la suite peut s'écrire sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\lambda + \mu n)(r_0)^n.$$

  où $\lambda$ et $\mu$ sont des réels déterminés à l'aide des deux premiers termes de la suite.

- Le cas où $(E)$ n'admet pas de racines réelles est hors programme.

**Exercice type 2.4** Déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n. \end{cases}$$

Commençons par résoudre l'équation caractéristique $(E)$ associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 : $r^2 = 2r + 3$. Ce qui équivaut à l'équation $r^2 - 2r - 3 = 0$. On a :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0 \text{ et } r_1 = \frac{2+\sqrt{16}}{2} = 3, \quad r_2 = \frac{2-\sqrt{16}}{2} = -1.$$

Ainsi pour tout $n$, $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 3^n$. Il reste à déterminer $\lambda$ et $\mu$. On a :

$$u_0 = 1 = \lambda(-1)^0 + \mu 3^0 = \lambda + \mu \text{ et } u_1 = 5 = \lambda(-1)^1 + \mu 3^1 = -\lambda + 3\mu.$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1, \\ -\lambda + 3\mu = 5. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on obtient $4\mu = 6$ d'où $\mu = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. On a alors $\lambda = 1 - \mu = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc pour expression :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{3}{2}3^n = \frac{1}{2}\left((-1)^{n+1} + 3^{n+1}\right).$$