19. Séries numériques

19.1 Introduction 1

19.2 Convergence 2

19.2.1 Définitions

19.2.2 Condition nécessaire de convergence

19.2.3 Opérations sur les séries convergentes

19.3 Séries de référence 8

19.3.1 La série géométrique et ses dérivées

19.3.2 La série exponentielle

19.3.3 Les séries de Riemann

19.4 Séries à termes positifs 13

19.4.1 Critères de convergence

19.4.2 Convergence absolue

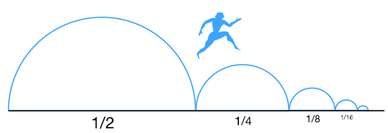
19.5 Lien suites et séries. Séries télescopiques 18

> Les séries divergentes sont une invention du diable et c'est une honte qu'on ose fonder sur elles la moindre démonstration.
>
> Niels Abel

Dans ce chapitre, nous allons étudier plus en détail un certain type de suites déjà rencontrées : les suites définies par une somme, qui sont appelées des ***séries.***
Ces suites particulières interviennent souvent en mathématiques, notamment en probabilités, lorsqu'on étudie les probabilités discrètes sur des ensembles infinis.

19.1 Introduction

La considération de sommes infinies est une question naturellement liée à celle du passage à la limite. Dans la seconde moitié du 5 ème siècle avant J.C., les Grecs commençaient à entrevoir les notions d'infini et de continu, opposées à celles de fini et de discret, moins abstraites. Le paradoxe de Zénon illustre leurs difficultés à formuler ces notions qui ne seront correctement définies qu'au 19 ème siècle.



19.2 Convergence

19.2.1 Définitions

Définition 19.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La série de terme général u_n est notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ou parfois simplement $\sum u_n$.

Le réel $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est appelé **la somme partielle d'indice** n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

*<u>Remarque</u> : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de **terme général** u_n n'est également définie qu'à partir de n_0, ce que l'on note $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$. La suite des **sommes partielles** est alors $(S_n)_{n\geqslant n_0}$, avec $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.*

Exemple 19.1

1. On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n$.

   Son **terme général** est : $u_n =$. Les premières **sommes partielles** sont :

   $S_0 =$, $S_1 =$, $S_2 =$, $S_3 =$, etc.

2. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**.

   Son **terme général** est : $u_n =$. Les premières sommes partielles sont :

   $S_1 =$, $S_2 =$, $S_3 =$, $S_4 =$, etc.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ étant une suite, on peut s'intéresser à sa convergence.

Définition 19.2 Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série. Soit S_n sa somme partielle d'indice n.

- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **convergente**.

  La limite S de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors appelée la **somme** de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et on note :
  $$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k\,.$$
- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **divergente**.
- Déterminer la **nature** de la série consiste à déterminer si elle est convergente ou divergente.

Attention !

- L'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la série **converge**! Alors que l'écriture $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ a toujours un sens, puisqu'elle désigne une suite.

- Tout comme on ne confond pas la suite (u_n), le n-ième terme u_n de cette suite et sa limite éventuelle ℓ, il convient de ne pas confondre la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, la n-ième somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et la somme éventuelle $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ de la série.

- Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies, puisqu'en réalité, ce sont des limites, et il faut donc toujours s'assurer de la convergence.

Exemple 19.2 1. Soit la série $\sum_{n\geqslant 0} 0$.

2. Soit la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1$.

Définition 19.3 (Reste d'une série convergente) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **converge**. On appelle reste d'ordre n de la série la valeur:

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque : Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$*, le reste d'une série convergente converge toujours vers 0.*

INTERDIT ! Ça n'a aucun sens de parler du reste d'une série divergente puisque $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'est pas défini pour une série divergente.

Exemple 19.3 On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exemple 19.4 On reprend l'exemple de la série harmonique.

Proposition 19.1 La série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est divergente.

Plus précisément: $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$.

19.2.2 Condition nécessaire de convergence

Proposition 19.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration.

□

*Remarque : Pour prouver qu'une série diverge, on peut utiliser la contraposée de ce résultat : il suffit de prouver que le terme général de la série ne converge pas vers 0. On dit alors que la série **diverge grossièrement**.*

Attention ! La réciproque est fausse : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et pourtant la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 19.5 Les séries $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n$, $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{n+1}$, $\sum_{n\geqslant 0}\frac{3^n}{2^n-3^n}$ sont grossièrement divergentes.

19.2.3 Opérations sur les séries convergentes

Les opérations sur les sommes finies se transposent, sous certaines conditions, aux séries.

Théorème 19.1 (Linéarité) Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes et λ un réel. Alors:

- La série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ est également convergente et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k+v_k)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k+\sum_{k=0}^{+\infty}v_k.$$

- La série $\sum_{n\geqslant 0}\lambda u_n$ est convergente et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda u_k=\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}u_k.$$

<u>Remarque</u> : Cela signifie que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration.

$\square$

Attention ! La réciproque du premier point n'est pas vraie! La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ n'assure pas du tout la convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.
Par exemple, si pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n}$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ converge alors que ni $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ni $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ ne convergent (voir les exemples précédents).

19.3 Séries de référence

19.3.1 La série géométrique et ses dérivées

Définition 19.4 Pour tout réel q, la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ s'appelle série géométrique de raison q.

Exemple 19.6 On a vu précédemment que la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ converge et que sa somme vaut 2.

En fait, plus généralement, on a le résultat suivant:

Théorème 19.2 La série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente, si et seulement si, $|q|<1$. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Démonstration.

□

On dispose également de deux séries, appelées séries geométriques dérivées première et deuxième :

Théorème 19.3 (Série géométrique dérivée première) La série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Théorème 19.4 (Série géométrique dérivée deuxième) La série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Démonstration.

$\square$

Attention ! le résultat « la dérivée de la somme est la somme des dérivées » n'est vrai que pour le cas de sommes FINIES. On ne peut jamais dériver directement une somme infinie : il faut se ramener à dériver les sommes partielles, puis passer à la limite.

Exercice type 19.1 Soit la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2+(-1)^n}{3^n}$. Justifier sa convergence et calculer sa somme.

19.3.2 La série exponentielle

Théorème 19.5 Soit $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est appelée **série exponentielle** et converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a de plus :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Démonstration.

□

Exemple 19.7

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

- Cacluler $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln(5))^k}{k!}$.

19.3.3 Les séries de Riemann

Théorème 19.6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée **série de Riemann** et converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.

□

19.4 Séries à termes positifs

19.4.1 Critères de convergence

Proposition 19.3 **(Condition nécessaire et suffisante de convergence)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration.

□

Exemple 19.8 On étudie la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$.

Exemple 19.9 La Proposition 19.3 permet de montrer la convergence des séries de Riemann dans le cas $\alpha > 1$.

Proposition 19.4 (Critère de convergence par comparaison) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs, telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge.
- Si la série de terme général u_n diverge vers $+\infty$ alors la série de terme général v_n diverge vers $+\infty$.

Attention ! Dans le cas où il y a convergence, ce résultat ne signifie pas nécessairement que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. En effet, les premiers termes peuvent modifier significativement les valeurs des sommes.

Exemple 19.10 Reprenons l'exemple de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$.

Exemple 19.11 La Proposition 19.4 permet également d'étudier la convergence des séries de Riemann dans le cas $\alpha < 1$.

Proposition 19.5 (Critère de convergence par équivalence) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs, telles que $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ ont même nature.

Attention ! Cela ne signifie pas que les suites des sommes partielles sont équivalentes, puisqu'on n'a pas le droit de sommer des équivalents.

Exemple 19.12 Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n+n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

Proposition 19.6 (Critère de convergence par négligeabilité) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs qui vérifient $u_n = o(v_n)$. Si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} v_n$ converge alors la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge également.

Remarque : Il est impossible de montrer la divergence d'une série par un critère de négligeabilité.

Exemple 19.13 Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \exp(-\sqrt{n})$.

Méthode 19.1 (Utiliser les différents critères de convergence) Lorsque je cherche la nature d'une série à termes positifs, je peux penser à comparer ($\sim$, o, $\leqslant$, $\geqslant$) son terme général à celui d'une série à termes positifs dont je connais la nature et conclure grâce aux différents critères de convergence.
Attention ! Je n'applique ce théorème que pour les suites à termes positifs, et je le précise dans ma rédaction !

Remarque : Les critères de convergence énoncés dans cette partie s'adaptent sans difficulté aux séries à termes négatifs. C'est pour cela, qu'on parle parfois de critères de convergence pour les séries à termes de signe constant.

19.4.2 Convergence absolue

Puisque nous connaissons des outils performants pour l'étude des séries à termes positifs, il est utile de relier l'étude d'une série à termes quelconques à celle d'une série à termes positifs. C'est pour cette raison que l'on introduit la notion de convergence absolue.

Définition 19.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

Exemple 19.14
1. Toute série géométrique de raison $q \in]-1,1[$ est absolument convergente.
2. La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

Théorème 19.7 Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration.

□

Attention ! La réciproque de ce théorème est fausse. En effet, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente. Cette série est alors dite semi-convergente.

Exercice 19.1 Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ est convergente.

19.5 Lien suites et séries. Séries télescopiques

Définition 19.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est appelée **série télescopique**.

Proposition 19.7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature en terme de convergence.

Démonstration.

□

Exemple 19.15 On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$.

Méthode 19.2 Pour étudier la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il peut être parfois utile d'étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$.

Exemple 19.16 Etudions la convergence de la suite u_n définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\int_1^n \frac{1}{x^2+\ln(x)+1}\,\mathrm{d}x.$$