19. Séries numériques

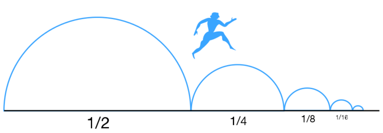
Les séries divergentes sont une invention du diable et c'est une honte qu'on ose fonder sur elles la moindre démonstration.

Niels Abel

Dans ce chapitre, nous allons étudier plus en détail un certain type de suites déjà rencontrées : les suites définies par une somme, qui sont appelées des ***séries.***
Ces suites particulières interviennent souvent en mathématiques, notamment en probabilités, lorsqu'on étudie les probabilités discrètes sur des ensembles infinis.

19.1 Introduction

La considération de sommes infinies est une question naturellement liée à celle du passage à la limite. Dans la seconde moitié du 5 ème siècle avant J.C., les Grecs commençaient à entrevoir les notions d'infini et de continu, opposées à celles de fini et de discret, moins abstraites. Le paradoxe de Zénon illustre leurs difficultés à formuler ces notions qui ne seront correctement définies qu'au 19 ème siècle.



19.2 Convergence

19.2.1 Définitions

Définition 19.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La série de terme général u_n est notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ou parfois simplement $\sum u_n$.

Le réel $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est appelé **la somme partielle d'indice** n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Remarque : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de ***terme général*** *u_n n'est également définie qu'à partir de n_0, ce que l'on note $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$. La suite des* ***sommes partielles*** *est alors $(S_n)_{n\geqslant n_0}$, avec $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.*

Exemple 19.1

1. On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n$.

   Son **terme général** est : $u_n = n$. Les premières **sommes partielles** sont :

   $$S_0 = 0, \qquad S_1 = 0+1 = 1, \qquad S_2 = 0+1+2 = 3, \qquad S_3 = 0+1+2+3 = 6, \text{ etc.}$$

   De manière générale, on peut montrer (par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$) que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**.

   Son **terme général** est : $u_n = \frac{1}{n}$. Les premières sommes partielles sont :

   $$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \quad S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}, \text{ etc.}$$

   Il n'y a pas de formule simple pour la somme partielle S_n d'indice n.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ étant une suite, on peut s'intéresser à sa convergence.

Définition 19.2 Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série. Soit S_n sa somme partielle d'indice n.

- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est **convergente**.

  La limite S de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors appelée la **somme** de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et on note :
  $$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k\,.$$
- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est **divergente**.
- Déterminer la **nature** de la série consiste à déterminer si elle est convergente ou divergente.

Attention !

- L'écriture $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la série **converge**! Alors que l'écriture $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ a toujours un sens, puisqu'elle désigne une suite.

- Tout comme on ne confond pas la suite (u_n), le n-ième terme u_n de cette suite et sa limite éventuelle ℓ, il convient de ne pas confondre la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, la n-ième somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et la somme éventuelle $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ de la série.

- Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies, puisqu'en réalité, ce sont des limites, et il faut donc toujours s'assurer de la convergence.

Exemple 19.2 1. Soit la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 0$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 0$.

Alors, la **somme partielle d'indice** n est : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 0 = 0$.

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc clairement convergente et sa limite vaut 0, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 0$ **converge** et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 0 = 0\,.$

2. Soit la série $\sum_{n\geqslant 0} 1$.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 1$.

   Alors, la **somme partielle d'indice** n est : $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

   La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} 1$ **diverge**.

Définition 19.3 (Reste d'une série convergente) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **converge**. On appelle reste d'ordre n de la série la valeur:

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque : Comme $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, le reste d'une série convergente converge toujours vers 0.

INTERDIT ! Ça n'a aucun sens de parler du reste d'une série divergente puisque $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'est pas défini pour une série divergente.

Exemple 19.3 On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Son **terme général** est : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
La **somme partielle d'indice** n est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad S_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Or, $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$.

La série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est donc convergente et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2.$$

Comme cette série converge, on peut parler de son reste, on a

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2-2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Exemple 19.4 On reprend l'exemple de la série harmonique.
Nous avons vu, dans le Chapitre 13 sur la dérivabilité, qu'on pouvait montrer grâce à l'inégalité des accroissements finis, que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à n, on obtient alors

$$\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = S_n.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) &= \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\\
&= \sum_{j=2}^{n+1}\ln(j)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\\
&= \sum_{j=2}^{n}\ln(j)+\ln(n+1)-\left(\sum_{k=2}^{n}\ln(k)+\ln(1)\right)\\
&= \ln(n+1).
\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\ln(n+1) = +\infty$, on en déduit, d'après le théorème de comparaison, que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$. Ainsi, la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est divergente.

Proposition 19.1 La série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Plus précisément: $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

19.2.2 Condition nécessaire de convergence

Proposition 19.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. Notons S_n sa somme partielle et S sa somme. L'astuce est de remarquer que :

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

En effet, $S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$. Passons alors à la limite dans l'égalité $u_n = S_n - S_{n-1}$, licite car la série converge. On obtient alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$. □

Remarque : Pour prouver qu'une série diverge, on peut utiliser la contraposée de ce résultat : il suffit de prouver que le terme général de la série ne converge pas vers 0. On dit alors que la série ***diverge grossièrement****.*

Attention ! La réciproque est fausse : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 19.5 Les séries $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n+1}$, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n}{2^n - 3^n}$ sont grossièrement divergentes.

En effet, on a déjà montré dans un chapitre précédent que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. Donc elle ne converge pas vers 0 et la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ est grossièrement divergente.

Calculons la limite de $\frac{n^2}{n+1}$. On a :

$$n+1 \sim n \quad \text{donc} \quad \frac{n^2}{n+1} \sim n$$

On peut alors conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n+1} = +\infty$. Ainsi la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2}{n+1}$ est grossièrement divergente.

Calculons la limite de $\dfrac{3^n}{2^n-3^n}$. On a :

$$2^n - 3^n \sim -3^n \quad \text{car} \quad 2^n = o(-3^n)$$

donc

$$\frac{3^n}{2^n-3^n} \sim \frac{3^n}{-3^n} = -1$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n}{2^n-3^n} = -1$. On en conclut que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{3^n}{2^n-3^n}$ est grossièrement divergente.

19.2.3 Opérations sur les séries convergentes

Les opérations sur les sommes finies se transposent, sous certaines conditions, aux séries.

Théorème 19.1 (Linéarité) Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes et λ un réel. Alors:

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ est également convergente et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ est convergente et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

<u>Remarque</u> : *Cela signifie que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de la somme (finie),

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Les hypothèses donnent la convergence du membre de droite, par somme de limites finies. Donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ converge, et le passage à la limite dans l'égalité précédente donne:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k+v_k)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k+\sum_{k=0}^{+\infty}v_k.$$

Le deuxième point se démontre de la même façon. □

Attention ! La réciproque du premier point n'est pas vraie! La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ n'assure pas du tout la convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}v_n$.
Par exemple, si pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=\frac{1}{n}$ et $v_n=-\frac{1}{n}$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ converge alors que ni $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ ni $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ ne convergent (voir les exemples précédents).

19.3 Séries de référence

19.3.1 La série géométrique et ses dérivées

Définition 19.4 Pour tout réel q, la série $\sum_{n\geqslant 0}q^n$ s'appelle série géométrique de raison q.

Exemple 19.6 On a vu précédemment que la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ converge et que sa somme vaut 2.

En fait, plus généralement, on a le résultat suivant:

Théorème 19.2 La série $\sum_{n\geqslant 0}q^n$ est convergente, si et seulement si, $|q|<1$. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}q^k=\frac{1}{1-q}.$$

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}q^k$. Montrons que la suite $(S_n)_n$ converge si et seulement si $q\in]-1,1[$. On a :

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q\neq 1\\ n+1 & \text{si} \quad q=1\end{cases}$$

Si $q \in]-1,1[$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$ donc $(S_n)_n$ converge, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.
Si $q = 1$, $(S_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
Si $q \leqslant -1$ alors q^{n+1} n'a pas de limites donc $(S_n)_n$ diverge.
Si $q > 1$, q^{n+1} diverge vers $+\infty$ et donc $(S_n)_n$ diverge.
En conclusion, $(S_n)_n$ converge si et seulement si $q \in]-1,1[$ et dans ce cas, on a bien :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

□

On dispose également de deux séries, appelées séries geométriques dérivées première et deuxième :

Théorème 19.3 **(Série géométrique dérivée première)** La série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Théorème 19.4 **(Série géométrique dérivée deuxième)** La série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Démonstration. On montre le résultat pour la série géométrique dérivée première (l'autre se montre de même en dérivant une fois de plus).
On commence par remarquer que si $|q| \geqslant 1$, les termes généraux ne convergent pas vers 0 , donc les séries divergent. Il ne reste donc que le cas de la convergence à traiter.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose f_n la fonction définie pour tout $x \in]-1;1[$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

La fonction f_n est dérivable sur $]-1,1[$, on peut donc la dériver (sous les deux formes) :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = f_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(-1)\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}$$

Or

$$\frac{-(n+1)x^n(1-x)-(-1)\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

donc pour tout $q\in]-1,1[$,

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}=\frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(1-q)^2}$$

Comme $|q|<1$, les croissances comparées donnent :

$$\lim_{n\to+\infty} nq^{n+1}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(n+1)q^n=0.$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}$, ce qui signifie que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nq^{n-1}$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

□

Attention ! le résultat « la dérivée de la somme est la somme des dérivées » n'est vrai que pour le cas de sommes FINIES. On ne peut jamais dériver directement une somme infinie : il faut se ramener à dériver les sommes partielles, puis passer à la limite.

Exercice type 19.1 Soit la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2+(-1)^n}{3^n}$. Justifier sa convergence et calculer sa somme.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+(-1)^k}{3^k}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{3^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3^k}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{3}\right)^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{3^k}+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{3}\right)^k-1=T_1+T_2-1.\end{aligned}$$

Etude de $T_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{3^k}$. Remarquons que l'on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{3^k} &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} k^2 q^k \text{ avec } q = \frac{1}{3} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 q^k = \sum_{k=1}^{n} k \times (k-1+1) q^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k(k-1)q^k + kq^k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)q^k + \sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^k + \sum_{k=1}^{n} kq^k \\
&= q^2 \sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} + q \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}
\end{aligned}$$

On reconnaît d'une part la somme partielle de la série géométrique dérivée deuxième et d'autre part la somme partielle de la série géométrique dérivée première. Donc notre série converge car $q \in]-1;1[$ et on a:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k = \frac{2q^2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}.$$

Etude de $T_2 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-1}{3}\right)^k$

On reconnaît la somme partielle de série géométrique avec $q = -\frac{1}{3} \in]-1;1[$.
En conclusion, notre notre série converge et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 + (-1)^k}{3^k} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)}{(1-\frac{1}{3})^3} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} - 1 = \frac{5}{4}.$$

19.3.2 La série exponentielle

Théorème 19.5 Soit $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est appelée **série exponentielle** et converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a de plus :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Démonstration. Pour démontrer la convergence de la série exponentielle, nous allons utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange. On sait que $\exp \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\exp)^{(n)} = \exp$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout t entre 0 et x, on a

$$\left|\exp^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M = \max(e^x, 1).$$

En effet, si $x < 0$ alors pour tout t$\in [x, 0]$,

$$\left|\exp^{(n+1)}(t)\right| = |\exp(t)| \leqslant 1.$$

Si $x \geqslant 0$, l'exponentielle étant croissante, on a pour tout $t \in [0, x]$:

$$\left|\exp^{(n+1)}(t)\right| = |\exp(t)| \leqslant \exp(x).$$

On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre n entre 0 et x :

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = \left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-0)^k}{k!}\mathrm{e}^0\right| \leqslant \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}M$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}M = 0$ par croissances comparées.

Donc par théorème d'encadrement la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge et sa somme vaut e^x. □

Exemple 19.7

- Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$.

  On reconnaît la somme de la série exponentielle avec $x = 1$, elle est bien convergente et on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1^k}{k!} = \mathrm{e}$

- Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

  On reconnaît la somme de la série exponentielle avec $x = -1$, elle est bien convergente et on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-1}$

- Calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(\ln(5))^k}{k!}$.

  On reconnaît la somme de la série exponentielle avec $x = \ln(5)$, elle est bien convergente et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln(5))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(5))^k}{k!} - \frac{(\ln(5))^0}{0!} = \mathrm{e}^{\ln(5)} - \frac{1}{1} = 5 - 1 = 4.$$

19.3.3 Les séries de Riemann

Théorème 19.6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée **série de Riemann** et converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Si $\alpha = 1$, c'est la série harmonique, dont on a déjà montré qu'elle diverge.
Si $\alpha \leqslant 0$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$ donc la série diverge grossièrement.
Pour les autres cas, cf Partie 19.4. □

19.4 Séries à termes positifs

19.4.1 Critères de convergence

Proposition 19.3 **(Condition nécessaire et suffisante de convergence)** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge si et seulement la suite $(S_n)_{n \geqslant 0}$ de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration. On considère la suite (S_n), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$$

donc cette suite est croissante.

($\Leftarrow$) Supposons que la suite (S_n) est majorée, comme elle est aussi croissante elle converge, et la série converge.

($\Rightarrow$) Si la série converge, comme la suite (S_n) est croissante, elle reste toujours plus petite que sa limite. Elle est donc majorée par la somme de la série.

□

Exemple 19.8 On étudie la nature de la série $\sum_{n \geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$.

C'est une série à termes positifs car $\forall k \geqslant 3$, $\ln(k) > 0$. Il suffit donc de montrer que la suite de ses sommes partielles est majorée. Posons pour $n \geqslant 3$, $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k \ln(k)}$. On remarque que pour tout $k \geqslant 3$,

$$\frac{5}{4^k \ln(k)} \leqslant \frac{5}{4^k}.$$

En sommant cette inégalité pour k variant de 3 à n, on obtient :

$$S_n \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k}.$$

Or

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k} = 5\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k = 5\times\left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$= 5\times\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right) = \frac{5}{48}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right).$$

Ainsi pour $n \geqslant 3$,

$$S_n \leqslant \frac{5}{48}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right) \leqslant \frac{5}{48}.$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant 3}$ est donc majorée et la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$ est convergente.

Exemple 19.9 La Proposition 19.3 permet de montrer la convergence des séries de Riemann dans le cas $\alpha > 1$.

L'astuce est d'effectuer une comparaison avec une intégrale.
On définit pour cela la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. Cette fonction est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc pour tout $k \geqslant 2$(garantit que $[k-1,k] \subset \mathbb{R}_+^*$) et pour $t \in [k-1,k]$,

$$f(k) \leqslant f(t).$$

La croissance de l'intégrale donne alors:

$$\frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}dt.$$

Soit $n \geqslant 2$, en sommant sur $k \in [\![2,n]\!]$, la relation de Chasles donne

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt.$$

Et donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt = 1 + \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = 1 + \frac{1-n^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Ainsi $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée. C'est donc une série convergente.

Proposition 19.4 **(Critère de convergence par comparaison)** Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs, telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge.
- Si la série de terme général u_n diverge vers $+\infty$ alors la série de terme général v_n diverge vers $+\infty$.

Attention ! Dans le cas où il y a convergence, ce résultat ne signifie pas nécessairement que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. En effet, les premiers termes peuvent modifier significativement les valeurs des sommes.

Exemple 19.10 Reprenons l'exemple de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$.

Posons pour $n \geqslant 3$, $u_n = \frac{5}{4^n \ln(n)}$.
On a pour $n \geqslant 3$, $u_n \leqslant \frac{5}{4^n}$. On a majoré u_n par le terme général d'une série convergente. En effet,

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k} = 5 \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

On reconnaît alors la somme partielle d'une série géométrique pour $q = \frac{1}{4}$. Il s'agit bien d'une série convergente car $q \in]-1,1[$.
On peut donc conclure à l'aide du critère de convergence par comparaison que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$ est convergente.

Exemple 19.11 La Proposition 19.4 permet également d'étudier la convergence des séries de Riemann dans le cas $\alpha < 1$.

Si $\alpha < 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$.
Par critère de comparaison des séries à termes positifs, puisque $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge également.

Proposition 19.5 **(Critère de convergence par équivalence)** Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs, telles que $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ ont même nature.

Attention ! Cela ne signifie pas que les suites des sommes partielles sont équivalentes, puisqu'on n'a pas le droit de sommer des équivalents.

Exemple 19.12 Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2}$

   On a
   $$\frac{1}{n+n^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$
   Les deux suites sont à termes positifs et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. Donc d'après le critère de convergence par équivalence, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2}$ converge.

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

   On a $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n}$. Les deux suites sont à termes positifs et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 1$. Donc d'après le critère de convergence par équivalence, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ diverge.

Proposition 19.6 **(Critère de convergence par négligeabilité)** Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs qui vérifient $u_n = o(v_n)$. Si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge également.

<u>Remarque</u> : *Il est impossible de montrer la divergence d'une série par un critère de négligeabilité.*

Exemple 19.13 Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \exp(-\sqrt{n})$.

Par croissance comparée, on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \exp(-\sqrt{n}) = 0$. Donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ est le terme général d'une série de Riemann convergente $(2 > 1)$. Donc par critère de comparaison des séries de terme général positif, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Méthode 19.1 (Utiliser les différents critères de convergence) Lorsque je cherche la nature d'une série à termes positifs, je peux penser à comparer ($\sim$, o, $\leqslant$, $\geqslant$) son terme général à celui d'une série à termes positifs dont je connais la nature et conclure grâce aux différents critères de convergence.
Attention ! Je n'applique ce théorème que pour les suites à termes positifs, et je le précise dans ma rédaction !

Remarque : Les critères de convergence énoncés dans cette partie s'adaptent sans difficulté aux séries à termes négatifs. C'est pour cela, qu'on parle parfois de critères de convergence pour les séries à termes de signe constant.

19.4.2 Convergence absolue

Puisque nous connaissons des outils performants pour l'étude des séries à termes positifs, il est utile de relier l'étude d'une série à termes quelconques à celle d'une série à termes positifs. C'est pour cette raison que l'on introduit la notion de convergence absolue.

Définition 19.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

Exemple 19.14
1. Toute série géométrique de raison $q \in]-1,1[$ est absolument convergente.
2. La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

Théorème 19.7 Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série absolument convergente, l'astuce est d'écrire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \max(u_n, 0) - \max(-u_n, 0).$$

Les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} \max(u_n, 0)$ et $\sum_{n\geqslant 0} \max(u_n, 0)$ sont des séries dont les termes généraux sont positifs et majorés par $|un|$. Or $\sum_{n\geqslant 0} |un|$ converge donc d'après le critère de convergence par comparaison des séries positives convergentes, elles convergent également.
Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ peut s'écrire comme différence de deux séries convergentes, c'est donc une série convergente. $\square$

Attention ! La réciproque de ce théorème est fausse. En effet, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente. Cette série est alors dite semi-convergente.

Exercice 19.1 Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ est convergente.

Remarquons que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{\sin(n\theta)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$ soit $|u_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
On sait que la série $\sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge car c'est la série géométrique pour $q = \frac{1}{2} \in]-1,1[$.
Donc d'après le critère de convergence par comparaison, on peut affirmer que la série $\sum_{n \geqslant 0} |u_n|$ converge. La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est alors absolument convergente, on en conclut donc que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

19.5 Lien suites et séries. Séries télescopiques

Définition 19.6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est appelée **série télescopique**.

Proposition 19.7 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n \geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ ont même nature en terme de convergence.

Démonstration. Etudions S_n la somme partielle de la série $\sum_{n \geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$. On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k - u_0 = u_{n+1} - u_0.$$

Si u_n converge vers un réel ℓ, S_n converge alors vers ℓu_0. Réciproquement, si S_n converge vers un réel ℓ, u_n converge alors vers $\ell + u_0$. On montre de même que les deux suites divergent simultanément vers $+\infty$ ou $-\infty$. D'où le résultat. □

Exemple 19.15 On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Son **terme général** est : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. La somme partielle d'indice n est :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \qquad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \left(\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ est donc convergente et on a : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Méthode 19.2 Pour étudier la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il peut être parfois utile d'étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$.

Exemple 19.16 Etudions la convergence de la suite u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_1^n \frac{1}{x^2 + \ln(x) + 1} \mathrm{d}x.$$

Etudions la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2 + \ln(x) + 1} \mathrm{d}x - \int_1^n \frac{1}{x^2 + \ln(x) + 1} \mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2 + \ln(x) + 1} \mathrm{d}x.$$

Remarquons que pour pour $x \in [n, n+1]$,

$$0 \leqslant \frac{1}{x^2 + \ln(x) + 1} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi par croissance de l'intégrale ($n \leqslant n+1$), on obtient :

$$0 \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2+\ln(x)+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^2}(n+1-n),$$

soit

$$0 \leqslant u_{n+1}-u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ est donc à termes positifs et comme $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente, on conclut, à l'aide du critère de convergence par comparaison des séries à termes positifs, que la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ est convergente. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.