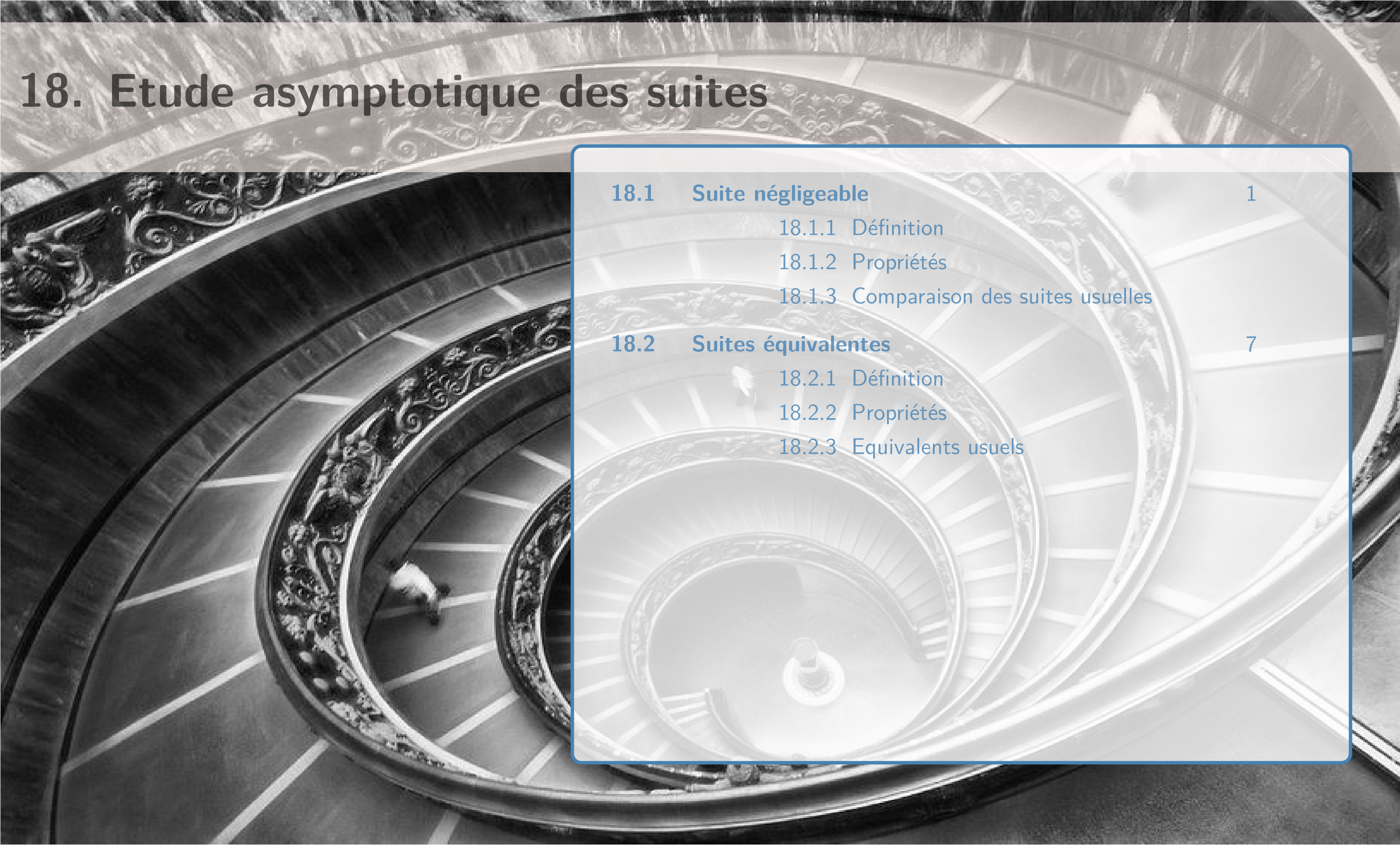

18. Etude asymptotique des suites

Il n'existe que deux choses infinies, l'univers et la bêtise humaine... mais pour l'univers, je n'ai pas de certitude absolue.

Albert Einstein

Dans ce chapitre, nous cherchons à comparer les comportements des suites lorsque n tend vers l'infini en se posant de questions comme: les suites ont-elles un comportement "équivalent" ou bien une des suites a-t-elle un comportement "dominant" ? Nous traiterons deux cas : celui où une suite est négligeable devant une autre et celui où les suites sont équivalentes.

18.1 Suite négligeable

18.1.1 Définition

Définition 18.1 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un entier n_0 tels que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = v_n \varepsilon_n \quad \text{et que} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$.

Remarque : L'égalité $u_n = o(v_n)$ se lit « u_n est un petit o de v_n ».

Exemple 18.1 1. $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

En effet pour tout $n > 0$, $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n}$, on a alors $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

2. $n = o(n^2)$

En effet pour tout $n > 0$, $n = n^2 \times \dfrac{1}{n}$,on a alors $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Attention ! On désigne par le symbole $o(v_n)$ n'importe quelle suite $(u_n)_n$ négligeable devant la suite $(v_n)_n$. C'est une notation, ainsi si on a $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$, on ne peut pas en déduire que $u_n = w_n$!

Notations : L'écriture $a_n = b_n + o(c_n)$ signifie que $a_n - b_n = o(c_n)$.

Exemple 18.2 On a $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

En effet, $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{-1}{n+1}$, on a alors $\varepsilon_n = -\dfrac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.
Ainsi $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 18.1 Montrer l'équivalence suivante :

$$u_n = o(1) \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Montrons cette équivalence par double implication.
($\Rightarrow$) Supposons que $u_n = o(1)$ alors par définition il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = 1 \times \varepsilon_n = \varepsilon_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
($\Leftarrow$) Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. On peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 \times u_n$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Ainsi par définition, $u_n = o(1)$.

Remarque : Il est assez courant en pratique d'écrire $u_n = o(1)$ pour dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

Proposition 18.1 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est négligeable devant } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe un entier n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1, v_n \neq 0$.
Montrons cette équivalence par double implication.
$(\Rightarrow)$ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un entier n_0 et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n\varepsilon_n$.
Donc pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on obtient $\frac{u_n}{v_n} = \varepsilon_n$, ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

$(\Leftarrow)$ Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, on pose pour $n \geqslant n_1 : \varepsilon_n = \frac{u_n}{v_n}$.
Par construction, $\forall n \geqslant n_1$, $u_n = v_n\varepsilon_n$, et

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Exemple 18.3 On $\ln(n) = o(n)$ par croissance comparée.

18.1.2 Propriétés

Proposition 18.2 **(Somme et produit de suites négligeables)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, si $u_n = o(w_n)$ alors $\lambda u_n = o(w_n)$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $u_n = o(v_n) \iff u_n = o(\lambda v_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ alors $u_n v_n = o(w_n v_n)$.

Démonstration.

- Comme $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, il existe deux suites $(\varepsilon_n)_n$ et $(\phi_n)_n$ convergeant vers 0 telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n\varepsilon_n$ et $v_n = w_n\phi_n$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n + v_n = w_n(\varepsilon_n + \phi_n) \text{ avec } \lim_{n\to+\infty}(\varepsilon_n + \phi_n) = 0$$

  donc $u_n + v_n = o(w_n)$.

- Comme $u_n = o(w_n)$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ convergeant vers 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n\varepsilon_n$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n = w_n \times (\lambda\varepsilon_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Ainsi $\lambda u_n = o(w_n)$.

- Raisonnons par double implication.
  $(\Rightarrow)$ Si $u_n = o(v_n)$ alors il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n\varepsilon_n$. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda v_n \frac{\varepsilon_n}{\lambda}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{\lambda} = 0$ c'est à dire $u_n = o(\lambda v_n)$.

($\Leftarrow$) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si $u_n = o(\lambda v_n)$ alors il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda v_n \varepsilon_n$ soit $u_n = v_n(\lambda\varepsilon_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda\varepsilon_n = 0$ donc $u_n = o(v_n)$.

- Comme $u_n = o(w_n)$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ convergeant vers 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n\varepsilon_n$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n v_n = w_n v_n \times \varepsilon_n \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0,$$

donc $u_n v_n = o(w_n v_n)$.

□

Proposition 18.3 (Suites négligeables et passage à la puissance) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et $\alpha > 0$. Si $u_n = o(v_n)$ et si u_n^α et v_n^α sont bien définis, alors $u_n^\alpha = o(v_n^\alpha)$.

Remarque : Ce résultat est en particulier vrai pour toutes les suites si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et pour toutes les suites strictement positives si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 18.4 (Transitivité des suites négligeables) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites. Si $u_n = o(v_n)$ et si $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.

Démonstration. Tous ces résultats se démontrent simplement en revenant à la définition de la négligeabilité. □

Remarque : En pratique, on exploite souvent ces relations en écrivant que :

1. $o(\lambda u_n) = o(u_n)$,
2. $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$,
3. $o(u_n)v_n = o(u_n v_n)$.

Ainsi, on écrira systématiquement $o(u_n)$ à la place de $o(3u_n)$ par exemple et $o(1)$ à la place de $o(5)$.

INTERDIT ! Une soustraction étant en particulier une addition, on a bien

$$o(u_n) - o(u_n) = o(u_n) \quad \text{et } \textbf{SURTOUT PAS} \quad o(u_n) - o(u_n) = 0!!!$$

On ne simplifie **JAMAIS** par des petits o.
Par exemple, pour $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $v_n = \dfrac{1}{n^3}$ et $w_n = \dfrac{1}{n}$, on a $u_n = o(w_n)$, $v_n = o(w_n)$ mais $u_n - v_n \neq 0$!

Exemple 18.4 Soit (u_n) une suite qui vérifie:

$$u_n = -2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Déterminer les limites de $(u_n), ((u_n+2)n)$ et $\left(\left(u_n + 2 - \frac{3}{n}\right)n^2\right)$.

On sait que $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge vers 0 , donc par somme de limites u_n converge vers -2. De même,

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n+2)n = \lim_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{4}{\ln n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 3.$$

Et par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n + 2 - \frac{3}{n}\right)n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4n}{\ln n} + o(1)\right) = +\infty.$

Exemple 18.5 On suppose que $u_n = 2 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1)$. Simplifier au maximum cette expression.

On commence par gérer les petits o : $\frac{\frac{1}{n^2}}{1}$ converge vers 0, donc $\frac{1}{n^2} = o(1)$ et $u_n = 2 + \frac{1}{n} + o(1)$. On remarque ensuite que $\frac{1}{n} = o(1)$, donc $u_n = 2 + o(1)$.

18.1.3 Comparaison des suites usuelles

Théorème 18.1 (Comparaison des suites usuelles de même type)

1. Si $a < b$ alors $n^a = o(n^b)$
2. Si $a < b$ alors $(\ln n)^a = o((\ln n)^b)$
3. Si $a < b$ alors $a^n = o(b^n)$

Théorème 18.2 (Comparaison des suites usuelles divergeant vers l'infini)

1. Si $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ alors $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$
2. Si $\alpha > 0$ et $\beta > 1$ alors $n^\alpha = o(\beta^n)$
3. Si $\alpha > 1$ alors $\alpha^n = o(n!)$

Théorème 18.3 (Comparaison des suites usuelles de limites nulles)

1. Si $0 < a < 1$ alors $\frac{1}{n!} = o(a^n)$
2. Si $0 < a < 1$ et $b > 0$ alors $a^n = o\left(\frac{1}{n^b}\right)$

3. Si $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ alors $\dfrac{1}{n^a} = o\left(\dfrac{1}{(\ln n)^b}\right)$

Démonstration. Les Théorèmes 18.2 et 18.3 se démontrent en utilisant les résultats de croissance comparée vus au Chapitre 7, à savoir

- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $b > 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0$.
- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $q \in]-1;1[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a q^n = 0$.
- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $q > 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a}{q^n} = 0$.
- Pour tout $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$ et pour tout $q \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n!q^n = +\infty$.

□

Remarque : En résumé, on peut écrire :

$$\frac{1}{n!} = o(\mathrm{e}^{-n}), \quad \mathrm{e}^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right), \quad \frac{1}{\ln(n)} = o(1),$$

$$1 = o(\ln n), \quad \ln(n) = o(n), \quad n = o\left(n^2\right), \quad n^2 = o\left(\mathrm{e}^n\right), \quad \mathrm{e}^n = o(n!).$$

Exercice 18.2 Comparer $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n\ln n}$, $\dfrac{1}{\ln n}$, $\dfrac{1}{(\ln n)^2}$ et $\dfrac{\ln(n)}{n}$.

On a :

$$\frac{1}{n\ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad \frac{\ln(n)}{n} = o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right), \quad \frac{1}{(\ln(n))^2} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln n}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{(\ln n)^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^3}{n} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{(\ln n)^2}}{\frac{1}{\ln n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$.

18.2 Suites équivalentes

18.2.1 Définition

Définition 18.2 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes lorsqu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un entier n_0 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = v_n\varphi_n$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

Exemple 18.6

1. On a $\dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$.

   En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

2. On a $\ln(n+1) \sim \ln n$.

   En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln n\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right),$$

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$ par composée de limites donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 0$ par quotient. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1$ et $\ln(n+1) \sim \ln n$.

Proposition 18.5 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe un entier n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1, v_n \neq 0$.
Raisonnons par double implication.
$(\Rightarrow)$ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un entier n_0 et une suite φ qui converge vers 1 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n\varphi_n$. Donc pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on obtient $\dfrac{u_n}{v_n} = \varphi_n$, ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = 1$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, on pose pour $n \geqslant n_1$: $\varphi_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. Par construction, $\forall n \geqslant n_1$, $u_n = v_n \varphi_n$, et

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes. □

Exemple 18.7

1. On a $n + \ln n + 2 \sim n$.

   En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n+\ln n+2}{n} = 1 + \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{2}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{2}{n} = 1$.

2. On a $\sqrt{n^2+n+1} \sim n$

   En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{n} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{n} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = 1$.

Remarque : *Grâce à la Proposition 18.5, on montre facilement le résultat suivant :*

$$\text{Si } u_n \sim n \text{ alors } |u_n| \sim |v_n|.$$

18.2.2 Propriétés

Proposition 18.6 (Lien entre équivalence et négligeabilité) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On a alors :

- $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n) \iff u_n - v_n = o(u_n)$.
- $u_n = o(v_n) \iff u_n + v_n \sim v_n$.

Démonstration. • Montrons que $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.
Raisonnons par double implication.
($\Rightarrow$) Supposons que $u_n \sim v_n$. Alors il existe une suite $(\varphi_n)_n$ qui converge vers 1 et un entier n_0 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = v_n \varphi_n$. Et donc $\forall n \geqslant n_0$,

$$u_n - v_n = v_n(\varphi_n - 1)$$

où $(\varphi_n - 1)$ converge vers 0 . D'où la négligeabilité.

($\Leftarrow$) Supposons que $u_n - v_n = o(v_n)$. Alors il existe une suite $(\varepsilon)_n$ qui converge vers 0 et un entier n_0 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$. Et donc $\forall n \geqslant n_0$,

$$u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$$

où $(\varepsilon_n + 1)$ converge vers 1 . D'où l'équivalence.
On montrerait de la même manière que $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(u_n)$.
•Le deuxième point se démontre de la même manière en revenant aux définitions. □

Ce résultat est très utile pour trouver des équivalents de sommes.

Exercice 18.3 Déterminer des équivalents de :

1. $2^n + n! + n^{10}$
   On a : $2^n + n! + n^{10} \sim n!$. En effet, $2^n = o(n!)$ et $n^{10} = o(n!)$.
2. $\ln n + 2\sqrt{n} + 1$
   On a : $\ln n + 2\sqrt{n} + 1 \sim 2\sqrt{n}$ car $\ln n = o(2\sqrt{n})$ et $1 = o(2\sqrt{n})$.
3. $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\ln n}$
   On a : $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\ln n} \sim \dfrac{1}{\ln n}$ car $\dfrac{1}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$.

Remarque : En conclusion, si $u_n \sim a_n + b_n$ et $b_n = o(a_n)$, alors on préférera écrire $u_n \sim a_n$. Par exemple, on écrira $u_n \sim n^2$ plutôt que $u_n \sim n^2 - 2n + 4$.

Attention ! Les constantes n'avaient pas d'importance lorsqu'on travaillait avec les petits o (par exemple $o(3) = o(1)$) mais pas pour les équivalents. Par exemple $3n \nsim n$.

Proposition 18.7 (Transitivité des équivalents) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.

Démonstration. On suppose que $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$. Il existe alors deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ qui convergent vers 1 et un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = v_n\varphi_n$ et $v_n = w_n\psi_n$. Alors $\forall n \geqslant n_0$,

$$u_n = (\varphi_n\psi_n)w_n$$

et $(\varphi_n\psi_n)$ converge vers 1 par produit. Donc $u_n \sim w_n$. □

Proposition 18.8 (Equivalents et signe de la suite) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

- $u_n \sim 0 \iff u_n = 0$ à partir d'un certain rang.
- Si $u_n \sim v_n$ et si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
- Si $u_n \sim v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant alors, à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est également et est de même signe que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Revenir aux définitions. □

Exemple 18.8 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{2}{n^2}$ est positive à partir d'un certain rang car elle est équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

En effet, $-\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $-\dfrac{2}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Proposition 18.9 (Produit et quotient d'équivalents) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites.

- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$ alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.
- Si de plus, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{t_n}$.

Remarque : Il est inutile de vérifier que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas pour appliquer le résultat car si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas alors $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non plus.

Attention !

- Si les équivalents se comportent bien avec le produit, ils ne sont **pas compatibles avec la somme** !
  On gardera en tête le contre-exemple suivant : posons $u_n = n^2+n, v_n = n^2$, $w_n = t_n = -n^2$.
  On a alors $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$ mais $u_n + w_n = n \nsim v_n + t_n = 0$.
- Il est également faux de dire que si $u_n \sim v_n$ alors $f(u_n) \sim f(v_n)$ pour f une fonction quelconque. Par exemple,
  - ★ $u_n \sim v_n$ et $\mathrm{e}^{u_n} \nsim \mathrm{e}^{v_n}$ pour $u_n = n$ et $v_n = n+1$
  - ★ $u_n \sim v_n$ et $\ln(u_n) \nsim \ln(v_n)$ pour $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

Proposition 18.10 (Equivalents et élévation à une puissance) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, soit α un réel. Si $u_n \sim v_n$ et si u_n^α est bien défini alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

<u>Remarque</u> : Ce résultat est en particulier vrai pour toutes les suites si $\alpha \in \mathbb{N}$, pour toutes les suites ne s'annulant pas si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et pour toutes les suites strictement positives si $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Les deux derniers résultats se démontrent simplement en revenant à la définition des équivalents. □

Exercice 18.4 Dans chaque cas, déterminer un équivalent simple:

1. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)(n+\ln n)^2$

   On a : $1+\dfrac{1}{n} \sim 1$. De plus, $n+\ln n \sim n$ car $\ln n = o(n)$ donc par passage à la puissance $(n+\ln n)^2 \sim n^2$ ainsi par produit $u_n \sim n^2$.

2. $u_n = \dfrac{\ln n+1}{n+\sqrt{n}}$

   On a : $\ln n+1 \sim \ln n$ car $1 = o(\ln n)$. De plus, $n+\sqrt{n} \sim n$ car $\sqrt{n} = o(n)$ donc par quotient $u_n \sim \dfrac{\ln n}{n}$.

3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$

   On a : $n^2+1 \sim n^2$ et par passage à la puissance $\sqrt{n^2+1} \sim n$. De même, $n^3+1 \sim n^3$ et par passage à la puissance $\sqrt[3]{n^3+1} \sim n$ donc par quotient $u_n \sim \dfrac{n}{n} = 1$.

Proposition 18.11 (Equivalents et limites) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \sim \ell$.
- Si $u_n \sim v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \neq 0$, alors $\left(\dfrac{u_n}{\ell}\right)$ converge vers 1 et donc $u_n \sim \ell$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors existe une suite $(\varphi_n)_n$ qui converge vers 1 et un entier n_0 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = v_n\varphi_n$. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Alors par limite d'un produit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \times 1 = \ell$.

□

Remarque : *La Proposition 18.11 est très pratique pour lever (très rapidement) des formes indéterminées.*

Exemple 18.9 On a $u_n = n^2 - n - \sqrt{n} \sim n^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Attention ! Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ non nulle alors $u_n \sim v_n$ (car les deux suites sont équivalentes à ℓ). En revanche, si $\ell \in \{-\infty, 0, +\infty\}$, on ne **peut rien conclure** !

On peut penser au contre-exemple $u_n = n$ et $v_n = n^2$ ou encore $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$

18.2.3 Equivalents usuels

Proposition 18.12 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0 et α un réel non nul fixé. Alors :

1. $\ln(1+u_n) \sim u_n$
2. $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$
3. $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
4. $\sin(u_n) \sim u_n$
5. $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$
6. $\tan(u_n) \sim u_n$

Démonstration. Les résultats découlent de la dérivabilité des fonctions considérées, et de la valeur du taux d'accroissement en 0 (sauf dans le cas du cosinus).

- On effectue ici la démonstration du 1). Si $u_n = 0$ à partir d'un certain rang alors $\ln(1+u_n)$ aussi et on a le résultat.
  Sinon, on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On pose $f(x) = \ln(1+x)$, alors f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1.$$

  Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on trouve par composition de limites :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$$

  ce qui montre $\ln(u_n+1) \sim u_n$.

- Pour l'équivalent du cosinus, on commence par utiliser la formule de duplication
$$\cos(u_n) - 1 = -2\sin\left(\frac{u_n}{2}\right)^2,$$
et comme $\frac{u_n}{2}$ converge vers 0, on peut appliquer l'équivalent du sinus :
$$\sin\left(\frac{u_n}{2}\right) \sim \frac{u_n}{2}.$$
Par passage au carré (autorisé car c'est une puissance) et produit par un scalaire,
$$\cos(u_n) - 1 = -2\sin\left(\frac{u_n}{2}\right)^2 \sim -2\left(\frac{u_n}{2}\right)^2 \sim -\frac{u_n^2}{2}.$$

$\square$

Exercice 18.5 Dans chaque cas, donner un équivalent simple:

1. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $u_n \sim \frac{1}{n}$.

2. $u_n = (n+1)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$

   On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. De plus, $n^2+1 \sim n^2$ et par passage à la puissance $\sqrt{n^2+1} \sim n$. Ainsi par quotient $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n}$. On a alors par produit $u_n \sim \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \sim 1$.

3. $u_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2}$

   On remarque que $-\frac{1}{n^2} = o\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. En effet,
$$\frac{\frac{-1}{n^2}}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)} = -\frac{1}{n^2\tan\left(\frac{1}{n}\right)}.$$
   Or comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc $n^2\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim n$ et par quotient :
$$\frac{\frac{-1}{n^2}}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{-1}{n}.$$
   Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{-1}{n^2}}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$. On en conclut que
$$u_n \sim \tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

4. $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

   On peut écrire astucieusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$,
$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} + \frac{2}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}.$$
   On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n-1} = 0$ et donc $u_n \sim \frac{2}{n-1}$. De plus $n-1 \sim n$ donc $u_n \sim \frac{2}{n}$.

5. $u_n = \left(1 + \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{\frac{2}{3}} - 1$

   On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par composée de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to0} \ln(1+x) = 0$ donc par composée de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$, ainsi
$$\left(1 + \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \sim \frac{2}{3}\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, on peut affirmer que $\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. En conclusion,
$$u_n \sim \frac{2}{3n}.$$

Exercice 18.6 Calculer la limite de la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

On ne peut pas utiliser $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ car α ne peut pas dépendre de n. On passe alors sous forme exponentielle :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$
On est donc ramené à étudier la limite de $n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Comme $\frac{1}{n}$ converge vers 0, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et on trouve par produit avec n :
$$n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim n\frac{1}{n} = 1.$$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et par composition de limite avec l'exponentielle (continue en 1), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.