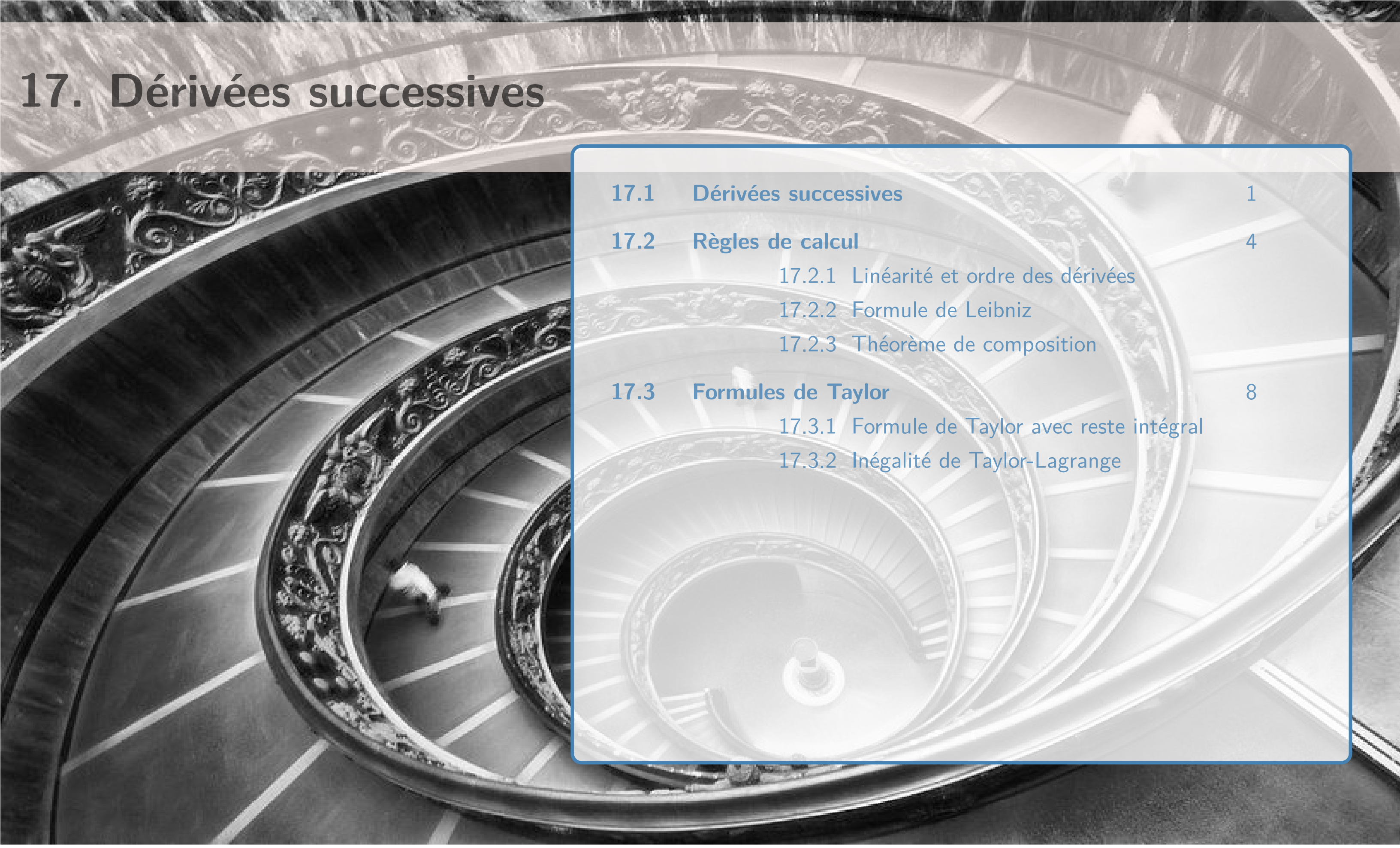
17. Dérivées successives



Ne tenez pour certain que ce qui est démontré.

Isaac Newton

Dans ce chapitre, nous allons voir les propriétés des fonctions que l'on peut dériver plusieurs fois. Nous introduirons ainsi la notion de dérivées successives. De plus, nous découvrirons les formules de Taylor, théorèmes d'une grande importance en analyse.

17.1 Dérivées successives

Définition 17.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **deux fois dérivable** si f et f' sont dérivables. Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.
- Plus généralement, on dit que f est **n fois dérivables** $(n \geqslant 1)$ si, pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $f^{(p)}$ est dérivable. On note alors $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Remarque : On a : $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$. *Par convention* $f^{(0)} = f$.

Attention ! La notation $f^{(p)}$ n'a rien à voir avec la notion de puissance!

Exemple 17.1 Nous avons calculé les dérivées successives de la fonction $f : x \mapsto x^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ dans le Chapitre 13. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

Proposition 17.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La dérivée $(n+1)$-ème d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n est nulle.

Exercice type 17.1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $\dfrac{1}{1-x}$.

1. Calculer $f^{(k)}(x)$ pour $k \in [\![1;4]\!]$ et $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Conjecturer une formule générale pour $f^{(n)}(x)$ puis la démontrer par récurrence sur n.

1.

2.

Définition 17.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^n$** sur I si f est n fois dérivable, et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

<u>Remarque</u> :

- *On retrouve la définition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vue au Chapitre 13 en prenant $n = 1$ dans la Définition 17.2.*
- *Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in [\![1; p]\!]$.*

Définition 17.3 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur I lorsque f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 17.2

- Les fonctions polynômes sont de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$.
- Les fonctions $\ln$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

17.2 Règles de calcul

17.2.1 Linéarité et ordre des dérivées

Proposition 17.2 Soit $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I. Alors:

- $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$.
- αf est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et $(\alpha f)^{(p)} = \alpha f^{(p)}$.

Corollaire 17.1 Soit $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Démonstration.

□

Remarque : On peut montrer de même que $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est également un espace vectoriel.

Proposition 17.3 Soit $p \in \mathbb{N}$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I. Alors:

- $\forall (m,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m+q \leqslant p$, $\left(f^{(m)}\right)^{(q)} = \left(f^{(q)}\right)^{(m)} = f^{(m+q)}$.
- $\forall m \in [\![0, p-1]\!], \left(f^{(m)}\right)' = (f')^{(m)} = f^{(m+1)}$.

17.2.2 Formule de Leibniz

Proposition 17.4 (Formule de Leibniz) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I. Alors la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration.

□

Exercice 17.1 Étudier la dérivabilité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$, et calculer ses dérivées.

Proposition 17.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Exemple 17.3 La fonction $\tan$ est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, à savoir , comme quotient de fonctions indéfiniment dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

17.2.3 Théorème de composition

Théorème 17.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits a un point, f une application définie de I dans $\mathbb{R}$ et g une application définie de J dans $\mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Alors:

- Si f est dérivable n fois sur I et g est dérivable n fois sur J, alors $g \circ f$ est dérivable n fois sur I.
- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Démonstration.

□

Corollaire 17.2 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point, f une application définie de I dans $\mathbb{R}$ et g une application définie de J dans $\mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Exercice 17.2 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle de définition? Quelle est l'expression de sa dérivée n-ième?

17.3 Formules de Taylor

17.3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 17.2 **(Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n)** Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle I. Pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

On appelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$ la **partie polynomiale** de la formule et $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ le **reste intégral** d'ordre n.

Exemple 17.4 Cela donne à l'ordre 3 pour $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$,

Démonstration.

$\square$

Remarque :

- *En particulier, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur l'intervalle I contenant 0, alors pour tout $x \in I$,*
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$
Cette formule sera particulièrement utile dans le Chapitre 26 sur les développements limités.

- *Si P est une fonction polynôme de degré n définie sur $\mathbb{R}$ alors P est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et $P^{(n+1)} = 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,*
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$
et on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes vue au Chapitre 8.

Exercice 17.3 1. Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 pour la fonction $\sin$ à l'ordre 3 puis à l'ordre 5.

2. En déduire que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

17.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 17.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I, \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$. Alors $\forall (a,b) \in I^2$,

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Démonstration.

□

Exemple 17.5 Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 17.4 Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = \mathrm{e}$.