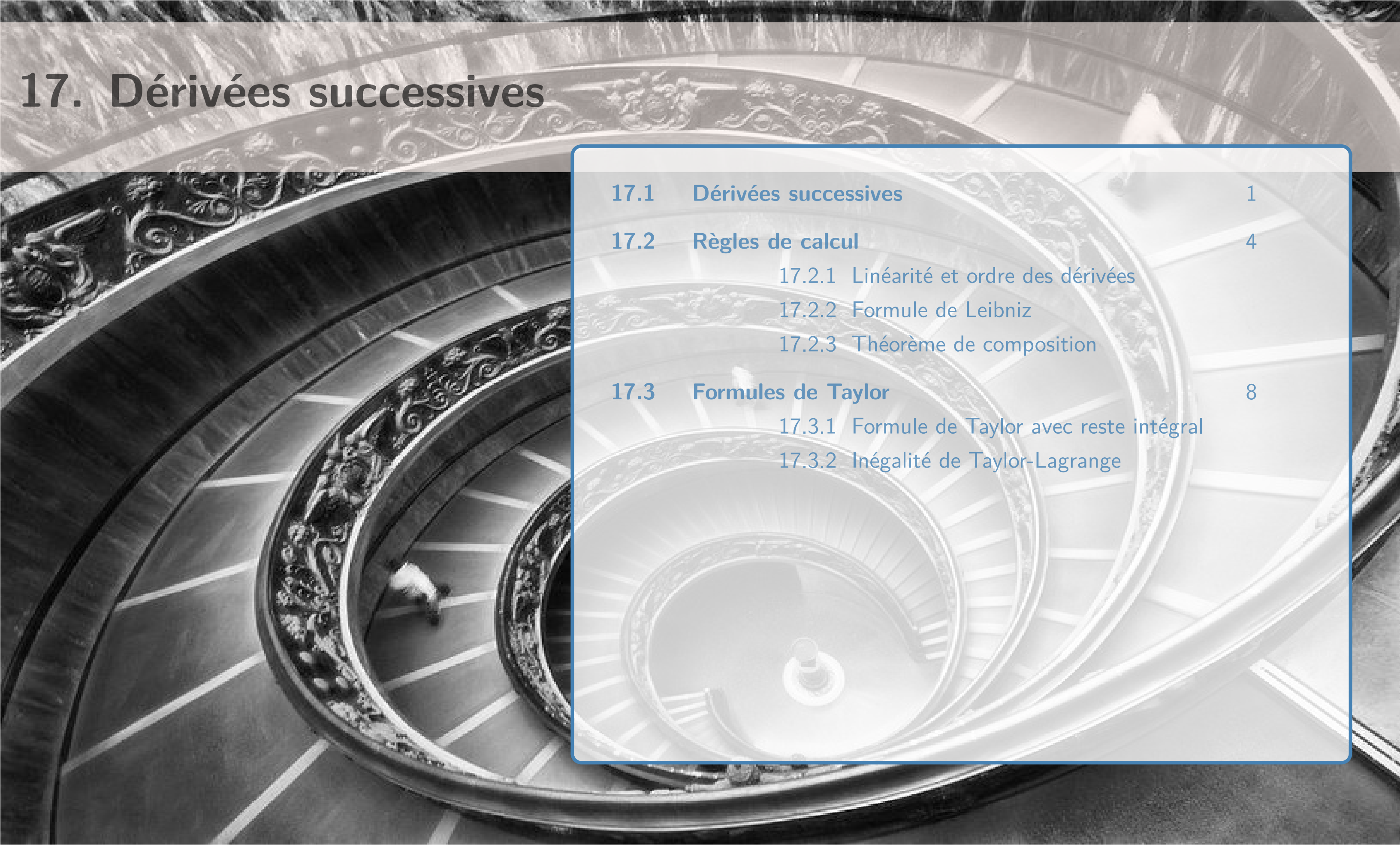

17. Dérivées successives

Ne tenez pour certain que ce qui est démontré.

Isaac Newton

Dans ce chapitre, nous allons voir les propriétés des fonctions que l'on peut dériver plusieurs fois. Nous introduirons ainsi la notion de dérivées successives. De plus, nous découvrirons les formules de Taylor, théorèmes d'une grande importance en analyse.

17.1 Dérivées successives

Définition 17.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **deux fois dérivable** si f et f' sont dérivables. Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.
- Plus généralement, on dit que f est n **fois dérivables** $(n \geqslant 1)$ si, pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $f^{(p)}$ est dérivable. On note alors $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Remarque : On a : $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$. *Par convention* $f^{(0)} = f$.

Attention ! La notation $f^{(p)}$ n'a rien à voir avec la notion de puissance!

Exemple 17.1 Nous avons calculé les dérivées successives de la fonction $f : x \mapsto x^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ dans le Chapitre 13. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si} \quad n \leqslant p \\ 0 & \text{si} \quad n > p \end{cases}$$

Proposition 17.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La dérivée $(n+1)$-ème d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n est nulle.

Exercice type 17.1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $\frac{1}{1-x}$.

1. Calculer $f^{(k)}(x)$ pour $k \in [\![1;4]\!]$ et $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Conjecturer une formule générale pour $f^{(n)}(x)$ puis la démontrer par récurrence sur n.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1-x)^5}$$

2. On conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Montrons ce résultat par récurrence.
On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. »

[Initialisation] $(n = 0)$
On a d'une part :

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x}$$

et d'autre part

$$\frac{0!}{(1-x)^{0+1}} = \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi $f^{(0)}(x) = \frac{0!}{(1-x)^{0+1}}$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

[Hérédité]Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x).$$

Or par hypothèse de récurrence, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Ainsi

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= n!\left(\frac{(n+1)(1-x)^{n+1-1}}{((x-1)^{n+1})^2}\right) \\ &= \frac{(n+1)!(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} \\ &= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

[Conclusion]La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a pour pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Définition 17.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable, et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque :

- *On retrouve la définition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vue au Chapitre 13 en prenant $n=1$ dans la Définition 17.2.*
- *Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in [\![1;p]\!]$.*

Définition 17.3 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsque f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 17.2

- Les fonctions polynômes sont de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$.
- Les fonctions $\ln$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

17.2 Règles de calcul

17.2.1 Linéarité et ordre des dérivées

Proposition 17.2 Soit $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I. Alors:

- $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$.
- αf est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et $(\alpha f)^{(p)} = \alpha f^{(p)}$.

Corollaire 17.1 Soit $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Démonstration. Montrons que $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies sur I.

- L'espace $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ est inclus dans l'espace des fonctions définies sur I.
- La fonction nulle est dans $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ donc $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R}) \neq \emptyset$.
- La Proposition 17.2 donne la stabilité par combinaison linéaire.

L'espace $\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})$ est donc bien un espace vectoriel. □

Remarque : On peut montrer de même que $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ est également un espace vectoriel.

Proposition 17.3 Soit $p \in \mathbb{N}$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I. Alors:

- $\forall (m,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m+q \leqslant p$, $\left(f^{(m)}\right)^{(q)} = \left(f^{(q)}\right)^{(m)} = f^{(m+q)}$.
- $\forall m \in [\![0, p-1]\!], \left(f^{(m)}\right)' = (f')^{(m)} = f^{(m+1)}$.

17.2.2 Formule de Leibniz

Proposition 17.4 (Formule de Leibniz) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I. Alors la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, on pose $\mathcal{P}(n)$: « Si $(f,g) \in \mathcal{C}^n(I)^2$, alors $fg \in \mathcal{C}^n(I)$ et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ ».

Initialisation $(n = 0)$ Le produit de deux fonctions continues sur I est une fonction continue sur I, et $(fg)^{(0)} = fg = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)}$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors f et g sont aussi de classe $\mathcal{C}^n$, et d'après l'hypothèse de récurrence fg est de classe $\mathcal{C}^n$ et:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!], f^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1-k}$, et donc au moins de classe $\mathcal{C}^1$. De même, $g^{(n-k)}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1-(n-k)} = \mathcal{C}^{k+1}$, et donc au moins de classe $\mathcal{C}^1$. Donc par produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $(fg)^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ce qui signifie que fg est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On obtient alors en dérivant la relation précédente:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n+1-j)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \text{ en posant } j = k+1 \text{ dans la 1ère somme} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n+1-j)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g + \binom{n}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \binom{n}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \text{ en utilisant la formule du triangle de Pascal.}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Exercice 17.1 Étudier la dérivabilité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$, et calculer ses dérivées.

On applique la formule de Leibniz à $x \to \mathrm{e}^x$ et $g : x \to x^2$ qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout réel x,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^x g^{(k)}(x).$$

On en déduit par propriétés des dérivées d'un polynôme :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \mathrm{e}^x g^{(k)}(x) \\ &= \mathrm{e}^x x^2 + n\mathrm{e}^x 2x + \frac{n(n-1)}{2} \mathrm{e}^x 2 \\ &= \mathrm{e}^x \left(x^2 + 2nx + n(n-1) \right). \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que la formule s'applique aussi pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui est bien le cas ici: elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 17.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Exemple 17.3 La fonction tan est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, à savoir $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, comme quotient de fonctions indéfiniment dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

17.2.3 Théorème de composition

Théorème 17.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits a un point, f une application définie de I dans $\mathbb{R}$ et g une application définie de J dans $\mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Alors:

- Si f est dérivable n fois sur I et g est dérivable n fois sur J, alors $g \circ f$ est dérivable n fois sur I.
- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Démonstration. On montre le premier point, le deuxième point se démontre avec une démarche similaire.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « si f est dérivable n fois sur I et g est dérivable n fois sur J, alors $g \circ f$ est dérivable n fois sur I ».

Initialisation $(n = 0)$ Si f et g sont deux fonctions dérivables 0 fois sur I et J respectivement. Alors $g \circ f$ est dérivable 0 fois sur I et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soient f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I et J respectivement. Elles sont en particulier dérivables, et par théorème de dérivation des fonctions composées, $g \circ f$ est dérivable sur I avec

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

Par hypothèse, les fonctions g' et f sont n fois dérivables sur J et I respectivement et donc par hypothèse de récurrence $(g' \circ f)$ est n fois dérivables sur I. Comme de plus f' est n fois dérivables sur I, par produit $(g \circ f)'$ est n fois dérivables. Donc $g \circ f$ est $n+1$ fois dérivables et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Corollaire 17.2 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point, f une application définie de I dans $\mathbb{R}$ et g une application définie de J dans $\mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Exercice 17.2 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle de définition? Quelle est l'expression de sa dérivée n-ième?

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.
On définit alors sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction f par $f(x) = \alpha \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $g(x) = \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On remarque que $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$ et on peut donc écrire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x^\alpha = (g \circ f)(x).$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ainsi par composition la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à savoir la fonction Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On peut démonter par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $x \mapsto x^\alpha$ vaut :

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n} = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha-i)\right)x^{\alpha-n}.$$

17.3 Formules de Taylor

17.3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 17.2 (Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n) Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle I. Pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

On appelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$ la **partie polynomiale** de la formule et $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ le **reste intégral** d'ordre n.

Exemple 17.4 Cela donne à l'ordre 3 pour $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$,

$$\begin{aligned} f(b) &= \frac{f^{(0)}(a)}{1!}(b-a)^0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}(b-a)^3 + \int_a^b \frac{(b-t)^3}{3!} f^{(4)}(t)\mathrm{d}t. \\ &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}}{6}(b-a)^3 + \int_a^b \frac{(b-t)^3}{6} f^{(4)}(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Démonstration. Cette formule se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$ ».

Initialisation $(n = 0)$ Comme f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, alors f' est continue, de primitive f, et on a :

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$$

d'où : $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(b-a)^0 + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f^{(1)}(t)\mathrm{d}t$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

On va alors effectuer une intégration par parties pour transformer l'intégrale. Posons $\begin{cases} u(t) &= f^{(n+1)}(t) \\ v'(t) &= \dfrac{(b-t)^n}{n!} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) &= f^{(n+2)}(t) \\ v(t) &= -\dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$.

Comme f est de la classe $\mathcal{C}^\infty$, les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$. On a donc par intégration par parties:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \int_a^b v'(t)u(t)\mathrm{d}t &= [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b v(t)u'(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En remplaçant dans la relation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Remarque :

- *En particulier, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle I contenant 0, alors pour tout $x \in I$,*
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$
Cette formule sera particulièrement utile dans le Chapitre 26 sur les développements limités.

- *Si P est une fonction polynôme de degré n définie sur $\mathbb{R}$ alors P est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $P^{(n+1)} = 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,*
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$
et on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes vue au Chapitre 8.

Exercice 17.3 1. Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 pour la fonction sin à l'ordre 3 puis à l'ordre 5.

La fonction sin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc écrire les formules de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 et 5. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\sin(t)\mathrm{d}t,$$

et

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \int_0^x \frac{(x-t)^5}{120}(-\sin(t))\mathrm{d}t.$$

2. En déduire que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $t \in [0, x]$ alors $\sin(t) \geqslant 0$ et $(x-t)^3 \geqslant 0$. Ainsi par positivité de l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\sin(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$. On en déduit que:

$$\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \geqslant 0,$$

soit $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $t \in [0, x]$ alors $-\sin(t) \leqslant 0$ et $(x-t)^5 \geqslant 0$. Ainsi par produit $\frac{(x-t)^5}{120}(-\sin(t)) \leqslant 0$ et par positivité de l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^5}{120}(-\sin(t))\mathrm{d}t \leqslant 0$. On en déduit que:

$$\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) \leqslant 0,$$

soit $\sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

17.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 17.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I, \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$. Alors $\forall (a,b) \in I^2$,

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Démonstration. On commence par démontrer l'inégalité dans le cas où $a \leqslant b$. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n, dont les hypothèses sont vérifiées car f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I. On a $\forall (a,b) \in I^2$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, par inégalité triangulaire comme $a \leqslant b$, on a :

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| = \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right|\mathrm{d}t.$$

Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$, ainsi

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant M \int_a^b \left|\frac{(b-t)^n}{n!}\right|\mathrm{d}t.$$

Comme $a \leqslant b$, on a $\frac{(b-t)^n}{n!} \geqslant 0$ et $M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = M\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b = M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. On a donc :

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Supposons maintenant $a \geqslant b$ alors :

$$\left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right|$$

On a par inégalité triangulaire, comme $b \leqslant a$ et en utilisant l'hypothèse sur $f^{(n+1)}(t)$,

$$\left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M \int_b^a \left|\frac{(b-t)^n}{n!}\right|\mathrm{d}t.$$

Or $\int_b^a \left|\frac{(b-t)^n}{n!}\right|\mathrm{d}t = \int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}\mathrm{d}t = \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}$. Soit

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| | \leqslant M\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On a donc bien montré que pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| | \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$\square$

Exemple 17.5 Montrer que pour tout $x>0$, $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.

La fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ et on a : $\forall t>0$

$$f'(t) = \frac{1}{t+1}, \quad f''(t) = -\frac{1}{(t+1)^2}.$$

On remarque que pour tout $t \in [0,+\infty[$, $|f''(t)| \leqslant 1$. On applique alors l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre 0 et $x>0$, on obtient :

$$\left|f(x) - f(0) - xf'(0)\right| \leqslant 1 \times \frac{(x-0)^2}{2},$$

soit en gardant seulement la minoration:

$$-\frac{x^2}{2} \leqslant f(x) - f(0) - f'(0)x = \ln(1+x) - \ln(1) - 1x.$$

Ainsi pour tout $x \in [0,+\infty[$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.

Exercice 17.4 Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$.

On définit sur $\mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x.$$

On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in [0,1]$, $|f^{(k)}(x)| \leqslant \mathrm{e}^1$. Écrivons alors l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 à l'ordre n, on a:

$$\left|f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \leqslant \frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^1,$$

soit

$$\left|\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$ par encadrement.