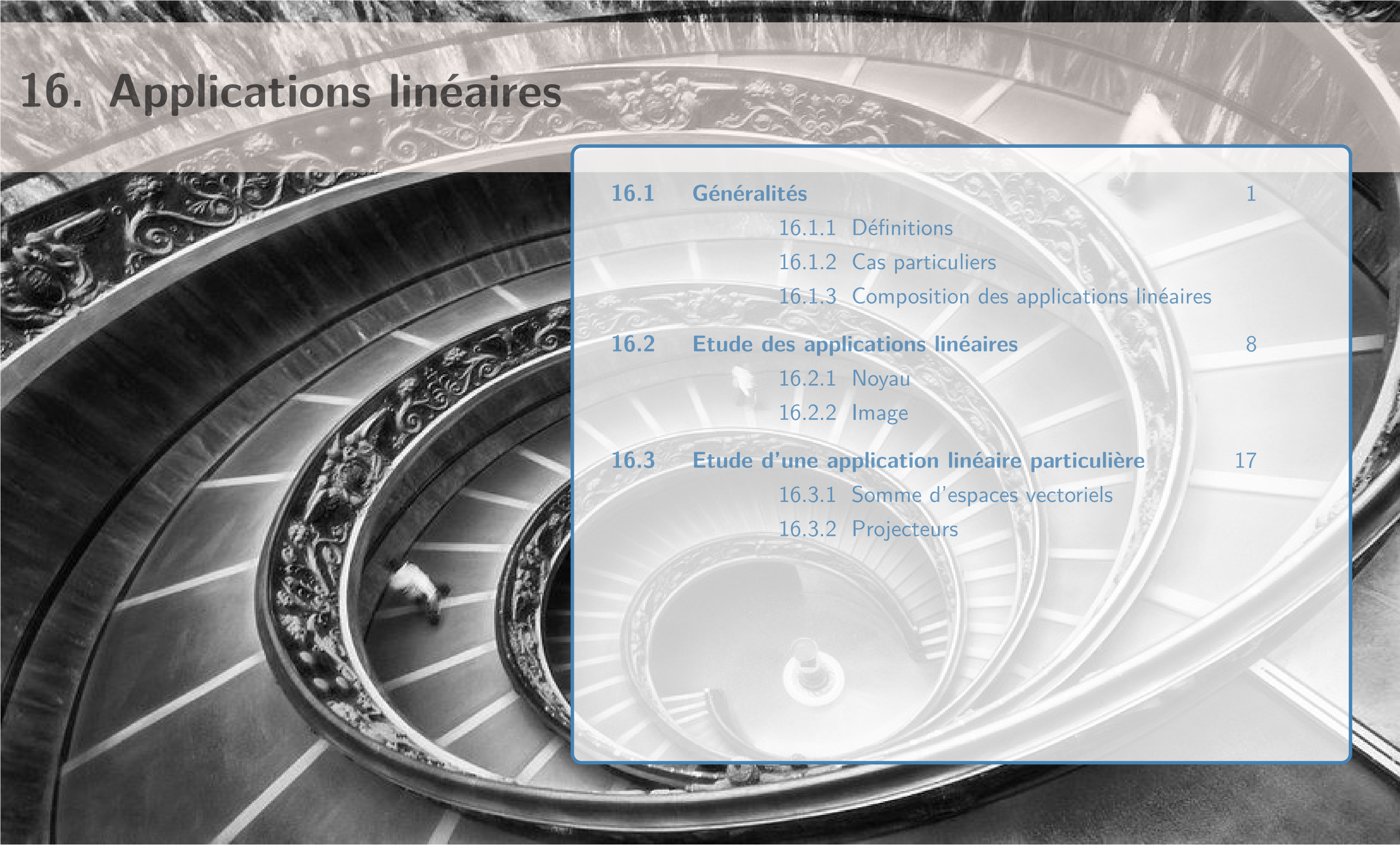
16. Applications linéaires



Un mathématicien est une machine pour transformer le café en théorème.

Paul Erdös

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité de celui sur les espaces vectoriels. Depuis le début de l'année, on a utilisé la propriété de la linéarité pour la somme, la dérivation, l'intégrale... Derrière cela se cache la notion d'application linéaire. Il s'agit d'applications qui vont d'un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel et qui présentent certaines propriétés. Etudier une application linéaire est beaucoup plus simple qu'étudier une application non-linéaire et beaucoup de problèmes peuvent être modélisés en première approche par une application linéaire.

16.1 Généralités

Soient E et F deux espaces vectoriels réels.

16.1.1 Définitions

Définition 16.1 On appelle **application linéaire** de E dans F, toute application f de E dans F telle que:

- $\forall (x,y) \in E^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Notations : On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple 16.1 1. L'application identité de E est une application linéaire:

$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

2. L'application nulle de E dans F est une application linéaire:

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$$

3. L'application suivante est une application linéaire:

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 4x \end{array} \right.$$

Proposition 16.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$.

Démonstration.

□

Proposition 16.2 f est une application linéaire de E dans F si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Remarque : Une application linéaire $f : E \to F$ laisse stable toutes combinaisons linéaires : pour tous scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et pour tous vecteurs $e_1, \ldots, e_n \in E$,

$$f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n).$$

Méthode 16.1 (Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire) On prouve que pour tout $(x,y) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Exemple 16.2 Démontrer que l'application suivante est une application linéaire.

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exemple 16.3 Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires?

1. La fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par: $f((x,y)) = x + y + 1$.

2. La fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par: $g((x,y)) = x + y$.

3. La fonction h définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par: $h((x,y)) = x \times y$.

Exemple 16.4 Montrer que l'application $P \to P'$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$.

Exercice type 16.1 Montrer que l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est une application linéaire.

Exercice 16.1 Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, montrons que l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

est une application linéaire.

Proposition 16.3 L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, noté $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

Démonstration.

□

16.1.2 Cas particuliers

Définition 16.2 On appelle **isomorphisme** de E dans F toute application linéaire bijective de E dans F.

Exemple 16.5 L'application identité de E est un isomorphisme.

Définition 16.3 Soit E et F deux espaces vectoriels. On dit que E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de E dans F.

Exercice 16.2 Montrer que l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0), P''(0)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme. Que peut-on en déduire?

Définition 16.4 On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans lui-même. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 16.6

1. L'application identité sur E
2. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe (y,x)
3. L'application $D : f \mapsto f'$ définie sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$
4. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe x^2

Remarque : Pour montrer qu'une application f est un endomorphisme de E, on doit donc montrer que f est une application linéaire **et** *que f est définie et à valeurs dans E.*

Définition 16.5 On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 16.7

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto P(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[x]$.
2. Soit $a \leqslant b$ deux réels. L'application $I : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à une fonction f associe $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

16.1.3 Composition des applications linéaires

Proposition 16.4 Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Démonstration.

□

Proposition 16.5 (Composée d'isomorphismes) Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E dans F, et g est un isomorphisme de F dans G, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G, et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration.

□

Définition 16.6 (Puissances d'un endomorphisme) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors par convention, on pose $f^0 = Id_E$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'endomorphisme f^n de E par

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

<u>Remarque</u> : *C'est la Proposition 16.4 qui garantit que f^n est bien un endomorphisme de E.*

Attention ! La notation f^n désigne la composée de f par f par f ... n fois et surtout pas f puissance n. On prendra garde à ne pas non plus confondre avec $f^{(n)}$ qui désigne la dérivée n-ième de f.

Exemple 16.8 L'application $f : P \to P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$. On peut donc définir ses puissances : pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, Grâce à la Définition 16.6, on peut démontrer la formule du binôme de Newton pour des endomorphismes.

Proposition 16.6 (Formule du binôme de Newton) Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

Exercice 16.3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(Id_E + f)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k.$$

16.2 Etude des applications linéaires

16.2.1 Noyau

Définition 16.7 Soit f une application linéaire de E vers F.
On appelle **noyau de** f l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est le vecteur nul de F. Ce sous-ensemble de E est noté $\mathrm{Ker}(f)$, et on a donc:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Remarque : Comme f est linéaire, on sait que $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$.

Exemple 16.9 Déterminer le noyau de l'application identité de E et de l'application nulle de E dans F:

$$\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{cases} \qquad \theta : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{cases}$$

Méthode 16.2 (Pour déterminer le noyau d'une application linéaire) On résout l'équation $f(x) = 0_F$ d'inconnue $x \in E$.

Exemple 16.10 Soit l'application linéaire f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Déterminons le noyau de f.

Exercice 16.4 Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, qui à (x, y) associe $(x - y, y - x)$.

2. $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui à f associe f'.

3. $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - 2y + 4z, 3x - z) \in \mathbb{R}^2$.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère l'application linéaire, $\phi : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto P(a) \in \mathbb{R}$.

Proposition 16.7 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

□

Proposition 16.8 **(Noyau et injectivité)** Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration.

□

Exercice 16.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $M \mapsto AM$.
Vérifier que A est inversible puis montrer que f est injectif.

16.2.2 Image

Définition 16.8 Soit f une application linéaire de E vers F.
On appelle **image de** f l'ensemble des images par f des éléments de E.
Ce sous-ensemble de F est noté $\mathrm{Im}(f)$, et on a:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

ce que l'on peut aussi écrire:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, \quad y = f(x)\}.$$

Remarque : Comme $f(0_E) = 0_F$ on a $0_F \in \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$.

Exemple 16.11 Déterminer l'image de l'application identité de E et de l'application nulle de E dans F:

$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad \theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$$

Exercice 16.6 Soit l'application linéaire f définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'image de f ?

Exemple 16.12 Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g((x,y)) = x + y$. Déterminer son image.

Proposition 16.9 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

□

Remarque : Les Propositions 16.7 et 16.9 nous donnent une nouvelle méthode pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel : on peut montrer qu'il est le noyau ou l'image d'une application linéaire.
Par exemple $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x+2y-3z=0\} = \mathrm{Ker}(f)$ *avec* $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x+2y-3z \in \mathbb{R}$ *qui est linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*.*

Exercice type 16.2 Déterminer l'image des applications linéaires suivantes:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 5x_2 - 5x_1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Proposition 16.10 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E admet une famille génératrice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

Démonstration.

□

Remarque : Cette méthode permet facilement de déterminer l'image d'une application linéaire f mais elle nécessite de connaître une famille génératrice de E, pour cela on peut penser aux bases canoniques.

Exercice 16.7 Déterminer l'image de l'application linéaire

$$f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Proposition 16.11 (Image et surjectivité) Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration.

□

Exercice 16.8 On considère l'application linéaire $f : P \to P'$ définie de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$. Déterminer son noyau et son image. Est-elle injective? surjective?

16.3 Etude d'une application linéaire particulière

16.3.1 Somme d'espaces vectoriels

Proposition 16.12 Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble H des éléments de E s'écrivant sous la forme de la somme d'un élément de F et d'un élément de G est un sous-espace vectoriel de E appelé **somme des sous-espaces vectoriels** F **et** G. On note :

$$H = F + G = \{u \in E \text{ tel que } u = x + y \text{ avec } (x,y) \in F \times G\}.$$

Démonstration.

□

Définition 16.9 Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F+G$ est une **somme directe** lorsque

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

Elle est alors noté $F \oplus G$.

Remarque : Comme F et G sont des espaces vectoriels, on a toujours $\{0\} \subset F \cap G$. Il suffit donc de montrer que $F \cap G \subset \{0\}$ pour montrer qu'une somme est directe.

Exemple 16.13 Monter que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((0,1)) \oplus \mathrm{Vect}((1,0))$.

Proposition 16.13 Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme $F+G$ est une somme directe si et seulement si tout élément u de $F+G$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$u = x + y \qquad \text{avec } (x,y) \in F \times G.$$

Démonstration.

$\square$

Définition 16.10 Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E = F \oplus G$.

Remarque : Un même espace vectoriel peut avoir plusieurs supplémentaires différents.

Exemple 16.14 Dans $\mathbb{R}_2[x]$, $\text{Vect}(x^2)$ et $\text{Vect}(x^2+1)$ sont deux supplémentaires de $\mathbb{R}_1[x]$.

16.3.2 Projecteurs

Dans toute cette partie, on notera E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Pour tout vecteur $x \in E$, on note (x_1, x_2) l'unique couple de $F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Définition 16.11 On appelle projecteur de E sur F_1 parallèlement à F_2 l'application p définie pour tout x de E par

$$p(x) = x_1.$$

On appelle projecteur de E sur F_2 parallèlement à F_1 l'application q définie pour tout x de E par

$$q(x) = x_2.$$

Les projecteurs p et q sont appelés **projecteurs associés.**

Exemple 16.15 On peut montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) \oplus \mathrm{Vect}((0,0,1))$, ce qui correspond pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ à la décomposition $(x,y,z) = (x,y,0) + (0,0,z)$. Soit f et g les applications définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f((x,y,z)) = (x,y,0) \quad \text{et} \quad g((x,y,z)) = (0,0,z)$$

Alors f et g sont deux projecteurs associés. Plus exactement,

- f est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur
- g est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur

Exercice 16.9 1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) \oplus \mathrm{Vect}((1,0,1))$.

2. Déterminer f et g les projecteurs associés à cette décomposition.

Proposition 16.14 Tout projecteur de E est un endomorphisme de E.

Démonstration.

□

Proposition 16.15 **(Noyau et image d'un projecteur)** Soit p le projecteur de E sur F_1 parallèlement à F_2. On a :

$$F_1 = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - Id_E) \quad \text{et} \quad F_2 = \mathrm{Ker}(p).$$

Démonstration.

□

Proposition 16.16 (Caractérisation des projecteurs associés) Soient p et q deux projecteurs de E. Ce sont des projecteurs associés si et seulement si ils vérifient :

$$p + q = Id_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

Proposition 16.17 (Caractérisation des projecteurs) Soit f un endomorphisme de E. L'application f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$.

Démonstration.

□

Exercice 16.10 Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f((x,y)) = (4x - 6y, 2x - 3y).$$

Montrer que f est un projecteur en précisant ses caractéristiques.