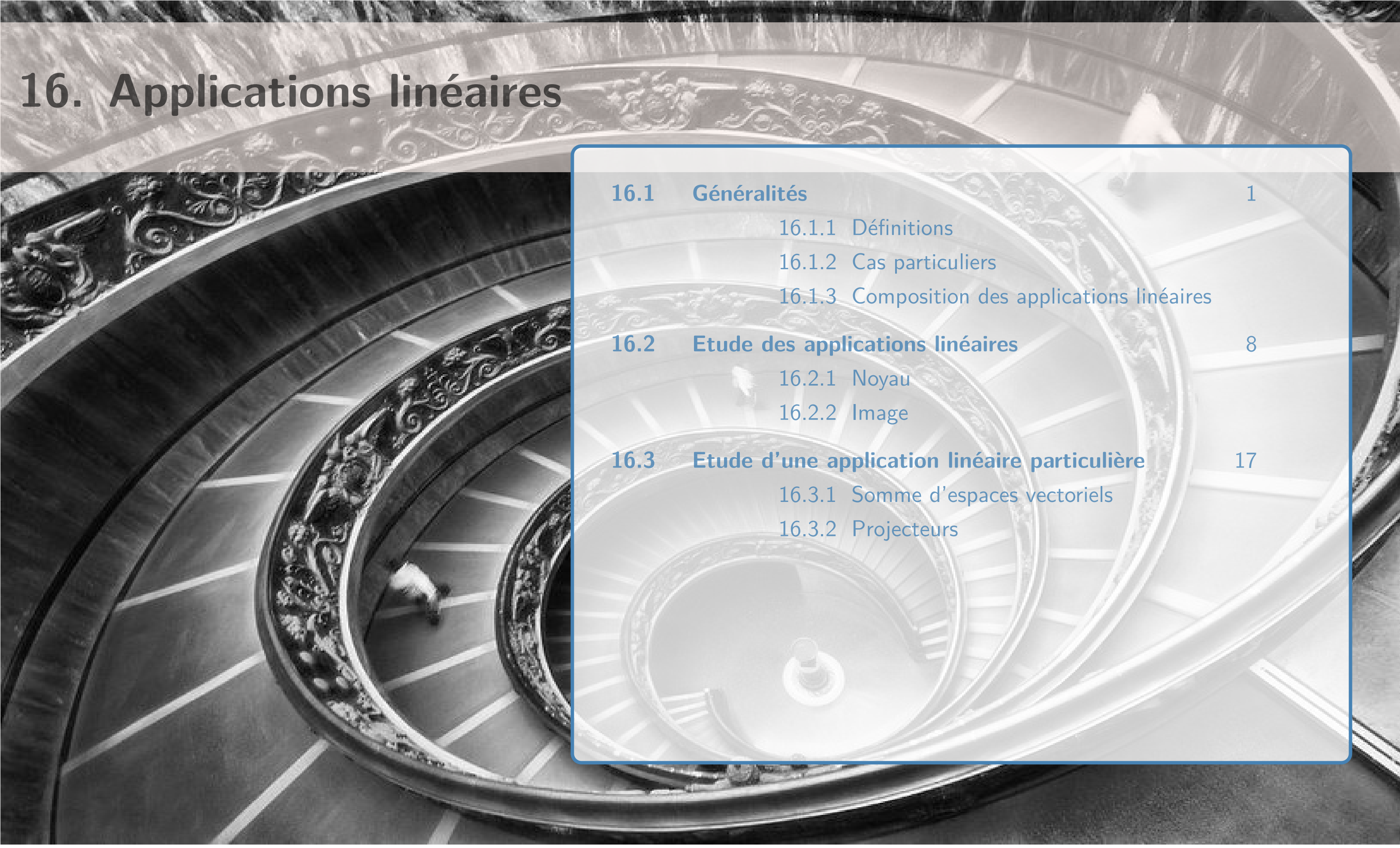

16. Applications linéaires

Un mathématicien est une machine pour transformer le café en théorème.

Paul Erdös

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité de celui sur les espaces vectoriels. Depuis le début de l'année, on a utilisé la propriété de la linéarité pour la somme, la dérivation, l'intégrale... Derrière cela se cache la notion d'application linéaire. Il s'agit d'applications qui vont d'un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel et qui présentent certaines propriétés. Etudier une application linéaire est beaucoup plus simple qu'étudier une application non-linéaire et beaucoup de problèmes peuvent être modélisés en première approche par une application linéaire.

16.1 Généralités

Soient E et F deux espaces vectoriels réels.

16.1.1 Définitions

Définition 16.1 On appelle **application linéaire** de E dans F, toute application f de E dans F telle que:

- $\forall (x,y) \in E^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Notations : On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple 16.1 1. L'application identité de E est une application linéaire:

$$\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$$

2. L'application nulle de E dans F est une application linéaire:

$$\theta : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{cases}$$

3. L'application suivante est une application linéaire:

$$\phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 4x \end{cases}$$

Proposition 16.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$.

Démonstration. La linéarité de f donne :

$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E).$$

En ajoutant l'opposé de $f(0_E)$ aux deux membres de cette égalité, on obtient que $f(0_E) = 0_F$. □

Proposition 16.2 f est une application linéaire de E dans F si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Remarque : Une application linéaire $f : E \to F$ laisse stable toutes combinaisons linéaires : pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et pour tous vecteurs $e_1, \dots, e_n \in E$,

$$f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n).$$

Méthode 16.1 (Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire) On prouve que pour tout $(x,y) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Exemple 16.2 Démontrer que l'application suivante est une application linéaire.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2(\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) \\ 4(\lambda x_1 + y_1) - 2(\lambda x_2 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(2x_1 - x_2) + 2y_1 - y_2 \\ \lambda(4x_1 - 2x_2) + 4y_1 - 2y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ 4y_1 - 2y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

L'application f est donc bien linéaire.

Exemple 16.3 Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires?

1. La fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par: $f((x,y)) = x + y + 1$.
   $f((0,0)) = 1 \neq 0$, donc f n'est pas une application linéaire.

2. La fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par: $g((x,y)) = x + y$.
   Soit (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$, et λ un réel.

   $$g(\lambda(x,y) + (x',y')) = g((\lambda x + x', \lambda y + y')) = \lambda x + x' + \lambda y + y' = \lambda g((x,y)) + g((x',y')).$$

   Donc g est une application linéaire.

3. La fonction h définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par: $h((x,y)) = x \times y$.
   $h((0,1) + (1,0)) = h((1,1)) = 1 \neq 0 + 0 = h((0,1)) + h((1,0))$. Donc h n'est pas une application linéaire.

Exemple 16.4 Montrer que l'application $P \to P'$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$.

En effet, soit P et Q deux polynômes, et λ un réel,

$$(\lambda P + Q)'(x) = \lambda P'(x) + Q'(x).$$

D'où le résultat.

Exercice type 16.1 Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

est une application linéaire.

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 3(\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) \\ 2(\lambda x_2 + y_2) \\ \lambda x_1 + y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(3x_1 - x_2) + 3y_1 - y_2 \\ \lambda(2x_2) + y_2 \\ \lambda(x_1) + y_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y_1 - y_2 \\ 2y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

L'application f est donc bien linéaire.

Exercice 16.1 Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, montrons que l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{cases}$$

est une application linéaire.

Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda X + Y) = M(\lambda X + Y) = M\lambda X + MY = \lambda MX + MY = \lambda f(X) + f(Y).$$

Ainsi l'application f est bien linéaire.

Proposition 16.3 L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, noté $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.

Démonstration. On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de F^E (dont on admet que c'est un espace vectoriel car E et F en sont, même s'il ne figure pas explicitement dans les espaces vectoriels de référence).

- L'application nulle est linéaire, donc $\mathcal{L}(E,F)$ n'est pas vide.

- On a clairement $\mathcal{L}(E,F) \subset F^E$.
- Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda f + g \in \mathcal{L}(E,F)$ i.e. montrons que c'est une application linéaire.
  Soit $(x,y) \in E^2$, et $\mu \in \mathbb{R}$. On a :
  $$\begin{aligned}(\lambda f + g)(\mu x + y) &= \lambda f(\mu x + y) + g(\mu x + y)\\ &= \lambda\mu f(x) + \lambda f(y) + \mu g(x) + g(y)\\ &= \mu(\lambda f(x) + g(x)) + \lambda f(y) + g(y)\\ &= \mu(\lambda f + g)(x) + (\lambda f + g)(y)\end{aligned}$$
  Donc $(\lambda f + g) \in \mathcal{L}(E,F)$, et $\mathcal{L}(E,F)$ est stable par combinaison linéaire.

Donc c'est un sous-espace vectoriel de F^E. Donc c'est un espace vectoriel. □

16.1.2 Cas particuliers

Définition 16.2 On appelle **isomorphisme** de E dans F toute application linéaire bijective de E dans F.

Exemple 16.5 L'application identité de E est un isomorphisme.

Définition 16.3 Soit E et F deux espaces vectoriels. On dit que E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de E dans F.

Exercice 16.2 Montrer que l'application
$$f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ P & \longmapsto & (P(0), P'(0), P''(0))\end{array}\right.$$
est un isomorphisme. Que peut-on en déduire?

Commençons par montrer que $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[x]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned}f(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(0), (\lambda P + Q)'(0), (\lambda P + Q)''(0))\\ &= (\lambda P(0) + Q(0), \lambda P'(0) + Q'(0), \lambda P''(0) + Q''(0))\\ &= (\lambda P(0), \lambda P'(0), \lambda P''(0)) + (Q(0), Q'(0), Q''(0))\\ &= \lambda f(P) + f(Q).\end{aligned}$$
L'application f est donc bien linéaire. Il reste à montrer qu'elle est bijective.
Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, on cherche un unique $P \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $f(P) = (\alpha,\beta,\gamma)$.
$P \in \mathbb{R}_2[x]$ donc il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P(x) = ax^2+bx+c$. On a alors $f(P) = (c,b,2a)$.
L'égalité $f(P) = (\alpha,\beta,\gamma)$ se traduit donc en 3 égalités :
$$c = \alpha, \quad b = \beta, \quad 2a = \gamma.$$
On obtient donc un unique polynôme P s'écrivant :
$$P(x) = \frac{\gamma}{2}x^2 + \beta x + \alpha.$$

L'application f est bien bijective, comme elle est linéaire, c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ vers $\mathbb{R}^3$.
On peut en déduire que les espaces vectoriels $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathbb{R}^3$ sont isomorphes.

Définition 16.4 On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans lui-même. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 16.6
1. L'application identité sur E est un endomorphisme de E.
2. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe (y, x) est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3. L'application $D : f \mapsto f'$ définie sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ n'est pas un endomorphisme (car f' n'est pas forcément dérivable).
4. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe x^2 n'est pas un endomorphisme car elle n'est pas linéaire.

<u>Remarque</u> : Pour montrer qu'une application f est un endomorphisme de E, on doit donc montrer que f est une application linéaire **et** *que f est définie et à valeurs dans E.*

Définition 16.5 On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 16.7
1. Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto P(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[x]$.
2. Soit $a \leqslant b$ deux réels. L'application $I : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à une fonction f associe $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

16.1.3 Composition des applications linéaires

Proposition 16.4 Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$g \circ f(\lambda x + y) = g(\lambda f(x) + f(y)) = \lambda g \circ f(x) + g \circ f(y).$$

D'où la linéarité de $g \circ f$. □

Proposition 16.5 (Composée d'isomorphismes) Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E dans F, et g est un isomorphisme de F dans G, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G, et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. On commence par remarquer que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.
Il reste à montrer que $g \circ f$ est bien une bijection. Soit $z \in G$ et $x \in E$. Puisque g et f sont des bijections,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) = z &\Longleftrightarrow g(f(x)) = z \\ &\Longleftrightarrow f(x) = g^{-1}(z) \\ &\Longleftrightarrow x = f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right) \\ &\Longleftrightarrow x = f^{-1} \circ g^{-1}(z). \end{aligned}$$

Donc tout élément $z \in G$ admet un unique antécédent $x \in E$ par $g \circ f$, qui est donc une bijection. Donc $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G. La relation précédente nous donne de plus que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Définition 16.6 (Puissances d'un endomorphisme) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors par convention, on pose $f^0 = Id_E$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'endomorphisme f^n de E par

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

<u>Remarque</u> : *C'est la Proposition 16.4 qui garantit que f^n est bien un endomorphisme de E.*

Attention ! La notation f^n désigne la composée de f par f par f ... n fois et surtout pas f puissance n. On prendra garde à ne pas non plus confondre avec $f^{(n)}$ qui désigne la dérivée n-ième de f.

Exemple 16.8 L'application $f : P \to P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$. On peut donc définir ses puissances : pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$,

$$f^p(P(x)) = P^{(p)}(x).$$

Grâce à la Définition 16.6, on peut démontrer la formule du binôme de Newton pour des endomorphismes.

Proposition 16.6 (Formule du binôme de Newton) Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

Exercice 16.3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(Id_E + f)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme Id_E et f commutent ($f \circ Id_E = Id_E \circ f$), on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(Id_E + f)^n = (f + Id_E)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ (Id_E)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ Id_E \quad \text{car} \quad (Id_E)^{n-k} = Id_E \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k.
\end{aligned}$$

16.2 Etude des applications linéaires

16.2.1 Noyau

Définition 16.7 Soit f une application linéaire de E vers F.
On appelle **noyau de** f l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est le vecteur nul de F. Ce sous-ensemble de E est noté $\mathrm{Ker}(f)$, et on a donc:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Remarque : Comme f est linéaire, on sait que $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$.

Exemple 16.9 Déterminer le noyau de l'application identité de E et de l'application nulle de E dans F:

$$\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{cases} \qquad \theta : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{cases}$$

- Par définition, on a :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid \mathrm{Id}_E(x) = 0_E\} = \{x \in E \mid x = 0_E\} = \{0_E\}.$$

- Par définition, on a :

$$\mathrm{Ker}(\theta) = \{x \in E \mid \theta(x) = 0_F\} = \{x \in E \mid 0_F = 0_F\} = E.$$

Méthode 16.2 (Pour déterminer le noyau d'une application linéaire) On résout l'équation $f(x) = 0_F$ d'inconnue $x \in E$.

Exemple 16.10 Soit l'application linéaire f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Déterminons le noyau de f.

On cherche $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(X) = 0_{2,1}$. On a :

$$f(X) = 0_{2,1} \iff \begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{cases}$$

$$f(X) = 0_{2,1} \iff \{ \; x_1 + x_2 = 0 \iff \{ \; x_1 = -x_2.$$

Ainsi les solutions du système $f(X) = 0_{2,1}$ sont de la forme $\begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 16.4 Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, qui à (x, y) associe $(x - y, y - x)$.

   Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f((x, y)) = (0, 0)$. On a donc :

   $$(x - y, y - x) = (0, 0) \iff x - y = 0 \text{ et } y - x = 0 \iff x = y.$$

   Ainsi
   $$\mathrm{Ker}(f) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

2. $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui à f associe f'.

   Soit $f \in \mathrm{Ker}(D)$ alors $D(f) = 0$ soit $f' = 0$.
   La fonction f est donc une fonction constante i.e. il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C$.
   On a donc
   $$\mathrm{Ker}(D) = \{\text{fonctions constantes}\}.$$

3. $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - 2y + 4z, 3x - z) \in \mathbb{R}^2$.

   Soit $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f((x, y, z)) = (0, 0)$ soit :

   $$(x - 2y + 4z, 3x - z) = (0, 0) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ 3x & & & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$
   $$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} 2y & = & x + 4z \\ z & = & 3x \end{array} \right.$$

   Soit $y = \dfrac{13}{2}x$ et $z = 3x$.
   Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \left\{(x, \dfrac{13}{2}x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left((1, \dfrac{13}{2}, 3)\right) = \mathrm{Vect}((2, 13, 6))$.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère l'application linéaire, $\phi : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto P(a) \in \mathbb{R}$.

   Soit $P \in \mathrm{Ker}(\phi)$ alors $\phi(P) = 0$ soit $P(a) = 0$.
   Alors $x - a$ divise P, soit il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$. Ainsi

   $$\mathrm{Ker}(\phi) = \{(x - a)Q(x) \mid Q \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Proposition 16.7 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Montrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. Rappelons que

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

- On a clairement $\mathrm{Ker}(f) \subset E$.
- $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$.
- Soient $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Ker}(f)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

  $$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \quad \text{par linéarité de } f.$$

  Or $f(x) = 0_F$ et $f(y) = 0_F$ car $x, y \in \mathrm{Ker}(f)$ donc

  $$f(\lambda x + y) = 0.$$

  Ainsi $\lambda x + y \in \mathrm{Ker}(f)$.

Nous venons donc de démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Proposition 16.8 **(Noyau et injectivité)** Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. Raisonnons par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que f est injective.
Alors 0_F a au plus un antécédent par f, donc $\mathrm{Ker}(f)$ a au plus un élément.
Or $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$ puisque f est linéaire. Donc

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Soit $(x,y) \in E^2$, supposons que $f(x) = f(y)$. Alors par linéarité, $f(x-y) = 0_F$ et $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $x - y = 0_E$ et $x = y$.
Donc f est injective. □

Exercice 16.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $M \mapsto AM$.
Vérifier que A est inversible puis montrer que f est injectif.

Comme A est une matrice de taille 2 , on calcule $1 \times 1 - 2 \times 1 \neq 0$ donc A est inversible.
Il nous reste à déterminer $\text{Ker}(f)$ pour étudier l'injectivité de f. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a les équivalences suivantes :

$$M \in K\text{er}(f) \Leftrightarrow f(M) = 0_2 \Leftrightarrow AM = 0_2 \Leftrightarrow A^{-1}AM = A^{-1}0_2 \text{ car } A \text{ inversible } \Leftrightarrow M = 0_2.$$

D'où $\text{Ker}(f) = \{0_2\}$ et f est injective.

16.2.2 Image

Définition 16.8 Soit f une application linéaire de E vers F.
On appelle **image de** f l'ensemble des images par f des éléments de E.
Ce sous-ensemble de F est noté $\text{Im}(f)$, et on a:

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

ce que l'on peut aussi écrire:

$$\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, \quad y = f(x)\}.$$

Remarque : Comme $f(0_E) = 0_F$ on a $0_F \in \text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f) \neq \emptyset$.

Exemple 16.11 Déterminer l'image de l'application identité de E et de l'application nulle de E dans F:

$$\text{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad \theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$$

- Par définition, on a :

$$\text{Im}(\text{Id}_E) = \{\text{Id}_E(x) \mid x \in E\} = \{x \mid x \in E\} = E.$$

- Par définition, on a :

$$\text{Im}(\theta) = \{\theta(x) \mid x \in E\} = \{0 \mid x \in E\} = \{0_F\}.$$

Exercice 16.6 Soit l'application linéaire f définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'image de f ?

Autrement dit le vecteur $y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ possède-t-il un ou des antécédent(s) par f ?
On cherche donc $x \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $y = f(x)$.
Cela revient à résoudre le système suivant:

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$(\mathcal{S}) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ & & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1; \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$(\mathcal{S}) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ & & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \\ & & & & 5x_3 & = & 15 \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

On obtient alors un système échelonné, on en déduit que :

$$x_3 = 3, \quad x_2 = \frac{-5 + 3 \times 3}{2} = 2, \quad x_1 = 5 + 2 - 2 \times 3 = 1.$$

Ainsi le vecteur $y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ possède un unique antécédent par f qui est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et donc $y \in \mathrm{Im}(f)$.

Exemple 16.12 Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g((x, y)) = x + y$. Déterminer son image.

Il est immédiat que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathbb{R}$.
Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$, $x = g((x, 0)) \in \mathrm{Im}(g)$.
On a donc montré par double inclusion que : $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$.

Proposition 16.9 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Montrons que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F. Rappelons que

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, \quad y = f(x)\}.$$

- On a clairement $\mathrm{Im}(f) \subset F$.
- $0_F = f(0_E)$ donc $0_F \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$.
- Soient $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $\tilde{y} \in \mathrm{Im}(f)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on souhaite montrer que $\lambda y + \tilde{y} \in \mathrm{Im}(f)$. Comme $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, de même comme $\tilde{y} \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $\tilde{x} \in E$ tel que $\tilde{y} = f(\tilde{x})$. On a donc :

$$\begin{aligned} \lambda y + \tilde{y} &= \lambda f(x) + f(\tilde{x}) \\ &= f(\lambda x) + f(\tilde{x}) \\ &= f(\lambda x + \tilde{x}), \quad \text{par linéarité de } f. \end{aligned}$$

  Or E est un espace vectoriel donc $z = \lambda x + \tilde{x} \in E$. Ainsi $\lambda y + \tilde{y} = f(z)$ avec $z \in E$, c'est-à-dire $\lambda y + \tilde{y} \in \mathrm{Im}(f)$.

Nous venons donc de démontrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F. □

Remarque : Les Propositions 16.7 et 16.9 nous donnent une nouvelle méthode pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel : on peut montrer qu'il est le noyau ou l'image d'une application linéaire.
Par exemple $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x+2y-3z = 0\} = \mathrm{Ker}(f)$ *avec* $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x+2y-3z \in \mathbb{R}$ *qui est linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice type 16.2 Déterminer l'image des applications linéaires suivantes:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 5x_2 - 5x_1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

- Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $x \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $y = f(x)$. Cela donne :

$$y = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

De plus, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Pour conclure,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right).$$

• Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$ alors il existe $x \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $y = g(x)$. Cela donne :

$$y = g\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\5x_2 - 5x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\-5x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-x_2\\5x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} = (x_1 - x_2)\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}\right).$$

De plus, $\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} = g\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ donc

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}\right) \subset \mathrm{Im}(g).$$

Pour conclure,

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}\right).$$

Proposition 16.10 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E admet une famille génératrice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

Démonstration. Montrons le résultat par double inclusion.

($\supset$) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(x_i) \in \mathrm{Im}(f)$. Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel, on en déduit que $\mathrm{Vect}(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \subset \mathrm{Im}(f)$.

($\subset$) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ étant génératrice de E, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Ainsi :

$$y = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \quad \text{par linéarité de } f.$$

Soit $y \in \mathrm{Vect}(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ et donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(f(x_1), \ldots, f(x_n))$. □

Remarque : Cette méthode permet facilement de déterminer l'image d'une application linéaire f mais elle nécessite de connaître une famille génératrice de E, pour cela on peut penser aux bases canoniques.

Exercice 16.7 Déterminer l'image de l'application linéaire

$$f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La famille $((1,0),(0,1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, c'est donc en particulier une famille génératrice. On a $f((1,0)) = (1,2)$ et $f((0,1)) = (1,2)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,2))$.

Proposition 16.11 **(Image et surjectivité)** Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. Raisonnons par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que f est surjective.
Alors tout élément de F a un antécédent par f, donc $F \subset \mathrm{Im}(f)$. L'inclusion réciproque étant immédiate, on a $\mathrm{Im}(f) = F$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}(f) = F$.
Soit $x \in F$. Alors, $x \in \mathrm{Im}(f)$, et donc x a un antécédent par f. Donc f est surjective. □

Exercice 16.8 On considère l'application linéaire $f : P \to P'$ définie de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$. Déterminer son noyau et son image. Est-elle injective? surjective?

- On commence par chercher le noyau. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$,

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff P' = 0 \iff \deg(P) = 0 \text{ ou } -\infty \iff P \in \mathbb{R}_0[x].$$

  Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[x]$. Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$, l'application f n'est pas injective.

- Cherchons à présent l'image. Il est direct que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}[x]$.
  Réciproquement, soit $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \in \mathbb{R}[x]$. On pose $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} x^{k+1}$, alors $f(P) = Q$, et $Q \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}[x]$, et l'application f est surjective.

16.3 Etude d'une application linéaire particulière

16.3.1 Somme d'espaces vectoriels

Proposition 16.12 Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble H des éléments de E s'écrivant sous la forme de la somme d'un élément de F et d'un élément de G est un sous-espace vectoriel de E appelé **somme des sous-espaces vectoriels F et G**. On note :

$$H = F + G = \{u \in E \text{ tel que } u = x + y \text{ avec } (x, y) \in F \times G\}.$$

Démonstration.

- On a clairement $H \subset E$.
- $0_E \in F \cap G$, donc $0_E = 0_E + 0_E \in H$ et H est non vide.
- Soit $(u, v) \in H^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on peut écrire

  $$u = x_u + y_u \quad \text{avec} \quad (x_u, y_u) \in F \times G$$

  et

  $$v = x_v + y_v \quad \text{avec} \quad (x_v, y_v) \in F \times G.$$

  Donc

  $$\begin{aligned} \lambda u + v &= \lambda(x_u + y_u) + (x_v + y_v) \\ &= (\lambda x_u + x_v) + (\lambda y_u + y_v) \end{aligned}$$

  où $\lambda x_u + x_v \in F$ et $\lambda y_u + y_v \in G$ puisque F et G sont stables par combinaison linéaire. Donc $\lambda u + v \in H$.

Ainsi H est un sous-espace vectoriel de E. □

Définition 16.9 Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F + G$ est une **somme directe** lorsque

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

Elle est alors noté $F \oplus G$.

Remarque : Comme F et G sont des espaces vectoriels, on a toujours $\{0\} \subset F \cap G$. Il suffit donc de montrer que $F \cap G \subset \{0\}$ pour montrer qu'une somme est directe.

Exemple 16.13 Monter que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((0,1)) \oplus \mathrm{Vect}((1,0))$.

- On sait que $\mathrm{Vect}((0,1)) \subset \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Vect}((1,0)) \subset \mathbb{R}^2$ donc $\mathrm{Vect}((0,1)) + \mathrm{Vect}((1,0)) \subset \mathbb{R}^2$.
  Par ailleurs, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on peut écrire :
  $$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in \mathrm{Vect}((0,1)) + \mathrm{Vect}((1,0))$$
  donc $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Vect}((0,1)) + \mathrm{Vect}((1,0))$.
  Par double inclusion, $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((0,1)) + \mathrm{Vect}((1,0))$.
- Il ne reste plus qu'à montrer que la somme est directe.
  Soit $(x,y) \in \mathrm{Vect}((0,1)) \cap \mathrm{Vect}((1,0))$. Alors $(x,y) \in \mathrm{Vect}((0,1))$ donc $x = 0$.
  Et $(x,y) \in \mathrm{Vect}((1,0))$ donc $y = 0$. Donc $(x,y) = (0,0)$.
  Ainsi $\mathrm{Vect}((0,1)) \cap \mathrm{Vect}((1,0)) \subset \{(0,0)\}$.

On peut donc conclure que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((0,1)) \oplus \mathrm{Vect}((1,0))$.

Proposition 16.13 Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme $F+G$ est une somme directe si et seulement si tout élément u de $F+G$ s'écrit de manière unique sous la forme :
$$u = x + y \qquad \text{avec } (x,y) \in F \times G.$$

Démonstration. Raisonnons par double implication.

$(\Rightarrow)$ Supposons que $F+G$ est une somme directe. Soit $u \in F+G$, supposons qu'on puisse écrire $u = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ avec $(x_1, y_1) \in F \times G$ et $(x_2, y_2) \in F \times G$, alors :
$$\underbrace{x_1 - x_2}_{\in F} = \underbrace{y_1 - y_2}_{\in G}.$$
Donc $x_1 - x_2 \in F \cap G = \{0_E\}$, c'est à dire $x_1 = x_2$. De même, $y_1 = y_2$. La décomposition de u est donc unique.

$(\Leftarrow)$ Réciproquement, supposons que tout élément u de $F+G$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = x + y$ avec $(x,y) \in F \times G$.
Soit $u \in F \cap G$, on peut le décomposer comme $u = u + 0$ et comme $u = 0 + u$.
L'unicité de la décomposition donne $u = 0_E$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$ et la somme est directe. □

Définition 16.10 Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E = F \oplus G$.

Remarque : Un même espace vectoriel peut avoir plusieurs supplémentaires différents.

Exemple 16.14 Dans $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathrm{Vect}(x^2)$ et $\mathrm{Vect}(x^2+1)$ sont deux supplémentaires de $\mathbb{R}_1[x]$.

Montrons que $\mathbb{R}_2[x] = \mathrm{Vect}(x^2) \oplus \mathbb{R}_1[x]$.

- On a clairement $\mathrm{Vect}(x^2) + \mathbb{R}_1[x] \subset \mathbb{R}_2[x]$.
- Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$ alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$. On remarque que $ax^2 \in \mathrm{Vect}(x^2)$ et que $bx + c \in \mathbb{R}_1[x]$. Ainsi $\mathbb{R}_2[x] \subset \mathrm{Vect}(x^2) + \mathbb{R}_1[x]$. Avec les deux inclusions, on a montré que $\mathbb{R}_2[x] = \mathrm{Vect}(x^2) + \mathbb{R}_1[x]$.
- Il reste à montrer que la somme est directe. Soit $P \in \mathrm{Vect}(x^2) \cap \mathbb{R}_1[x]$. Comme $P \in \mathrm{Vect}(x^2)$, soit P est de degré 2, soit $P = 0$. Comme $P \in \mathbb{R}_1[x]$, il est de degré au plus 1. Ainsi $P = 0$ et donc $\mathrm{Vect}(x^2) \cap \mathbb{R}_1[x] = \{0\}$.

Le raisonnement est quasiment identique pour montrer que $\mathbb{R}_2[x] = \mathrm{Vect}(x^2+1) \oplus \mathbb{R}_1[x]$. Seul le deuxième point diffère un peu.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$ alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$. On peut écrire que :

$$P(x) = a(x^2+1) + bx + c - a.$$

On remarque que $a(x^2+1) \in \mathrm{Vect}(x^2)$ et que $bx + c - a \in \mathbb{R}_1[x]$. Ainsi $\mathbb{R}_2[x] \subset \mathrm{Vect}(x^2+1) + \mathbb{R}_1[x]$.
On conclut alors de la même façon que pour la somme directe précédente.

16.3.2 Projecteurs

Dans toute cette partie, on notera E un espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Pour tout vecteur $x \in E$, on note (x_1, x_2) l'unique couple de $F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Définition 16.11 On appelle projecteur de E sur F_1 parallèlement à F_2 l'application p définie pour tout x de E par

$$p(x) = x_1.$$

On appelle projecteur de E sur F_2 parallèlement à F_1 l'application q définie pour tout x de E par

$$q(x) = x_2.$$

Les projecteurs p et q sont appelés **projecteurs associés.**

Exemple 16.15 On peut montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) \oplus \mathrm{Vect}((0,0,1))$, ce qui correspond pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ à la décomposition $(x,y,z) = (x,y,0) + (0,0,z)$. Soit f et g les applications définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f((x,y,z)) = (x,y,0) \quad \text{et} \quad g((x,y,z)) = (0,0,z)$$

Alors f et g sont deux projecteurs associés. Plus exactement,

- f est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((0,0,1))$.
- g est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathrm{Vect}((0,0,1))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$.

Exercice 16.9 1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) \oplus \mathrm{Vect}((1,0,1))$.

- On a clairement $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) + \mathrm{Vect}((1,0,1)) \subset \mathbb{R}^3$.
- Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (x-z,y,0) + (z,0,z) = (x-z,0,0) + (0,y,0) + (z,0,z) \\ &= (x-z)(1,0,0) + y(0,1,0) + z(1,0,1).\end{aligned}$$

  On a $(x-z)(1,0,0) + y(0,1,0) \in \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ et $z(1,0,1) \in \mathrm{Vect}((1,0,1))$. Ainsi $\mathbb{R}^3 \subset \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) + \mathrm{Vect}((1,0,1))$.
- Soit $(x,y,z) \in \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) \cap \mathrm{Vect}((1,0,1))$ alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que:

$$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(0,1,0) = (a,b,0) \quad \text{et} \quad (x,y,z) = c(1,0,1) = (c,0,c).$$

  Cela implique que : $(a,b,0) = (c,0,c)$ soit $a = c$, $b = 0$ et $c = 0$.
  Ainsi $(x,y,z) = (0,0,0)$ et $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) \cap \mathrm{Vect}((1,0,1)) = \{0\}$.

On peut donc conclure que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) \oplus \mathrm{Vect}((1,0,1))$.

2. Déterminer f et g les projecteurs associés à cette décomposition.

   Comme $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) \oplus \text{Vect}((1,0,1))$, on a pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ à la décomposition
   $$(x,y,z) = (x-z,y,0)+(z,0,z).$$
   Soient f et g les applications définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par
   $$f((x,y,z)) = (x-z,y,0) \quad \text{et} \quad g((x,y,z)) = (z,0,z).$$
   Alors f et g sont deux projecteurs associés. Plus exactement,

   - f est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $\text{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ parallèlement à $\text{Vect}((1,0,1))$.
   - g est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $\text{Vect}((1,0,1))$ parallèlement à $\text{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$.

Proposition 16.14 Tout projecteur de E est un endomorphisme de E.

Démonstration. Soit p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2, où $E = F_1 \oplus F_2$.
Il est immédiat que p est à valeurs dans E, il suffit donc de montrer que c'est une application linéaire. Soit $(x,y) \in E^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que les décompositions de x et y s'écrivent
$$x = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad y = y_1 + y_2 \quad \text{avec } (x_1,y_1) \in F_1^2 \quad \text{et} \quad (x_2,y_2) \in F_2^2.$$
Alors, $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)$, avec $\lambda x_1 + y_1 \in F_1$ et $\lambda x_2 + y_2 \in F_2$. On a :
$$p(\lambda x + y) = \lambda x_1 + y_1 = \lambda p(x) + p(y).$$
D'où le résultat. □

Proposition 16.15 **(Noyau et image d'un projecteur)** Soit p le projecteur de E sur F_1 parallèlement à F_2. On a :
$$F_1 = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - Id_E) \quad \text{et} \quad F_2 = \text{Ker}(p).$$

Démonstration.

- Commençons par montrer que $F_1 = \text{Im}(p)$.
  Soit $x \in F_1$, alors $x = x + 0_E$, où $(x, 0_E) \in F_1 \times F_2$. Donc $p(x) = x$.
  On en déduit que $x \in \text{Im}(p)$ et donc $F_1 \subset \text{Im}(p)$.
  Réciproquement, si $x \in \text{Im}(p)$, il existe $z \in E$ tel que $x = p(z)$. On décompose z comme $z_1 + z_2$, avec $(z_1,z_2) \in F_1 \times F_2$. Alors $x = z_1 \in F_1$ et $\text{Im}(p) \subset F_1$. D'où $F_1 = \text{Im}(p)$.

- Montrons ensuite que $F_1 = \text{Ker}(p - Id_E)$.
  Soit $x \in F_1$, on obtient comme dans le raisonnement précédent que $p(x) = x$ et donc $(p - Id_E)(x) = 0_E$. Donc $F_1 \subset \text{Ker}(p - Id_E)$.
  Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(p - Id_E)$. Alors, $p(x) - x = 0_E$ et donc $p(x) = x$. Donc $x \in \text{Im}(p) = F_1$ et $\text{Ker}(p - Id_E) \subset F_1$. D'où $F_1 = \text{Ker}(p - Id_E)$.

- Soit $x \in F_2$, alors $x = 0_E + x$, où $(0_E, x) \in F_1 \times F_2$. Donc $p(x) = 0_E$.
  On en déduit que $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $F_2 \subset \mathrm{Ker}(p)$.
  Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(p)$, $p(x) = 0_E$. On décompose x comme $x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$. La relation précédente donne alors $x_1 = 0_E$, on en déduit $x = x_2 \in F_2$.
  D'où $\mathrm{Ker}(p) \subset F_2$ et par double inclusion $F_2 = \mathrm{Ker}(p)$.

□

Proposition 16.16 (Caractérisation des projecteurs associés) Soient p et q deux projecteurs de E. Ce sont des projecteurs associés si et seulement si ils vérifient :

$$p + q = Id_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

Proposition 16.17 (Caractérisation des projecteurs) Soit f un endomorphisme de E. L'application f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$.

Démonstration. Montrons le résultat par double implication.
($\Rightarrow$) Supposons que f est un projecteur (sur F_1 parallèlement à F_2, avec $E = F_1 \oplus F_2$.) Soit $x \in E$, qu'on décompose en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. Alors $f(x) = x_1$, et comme $x_1 = x_1 + 0_E$ avec $x_1 \in F_1$ et $0_E \in F_2$ cela donne:

$$f \circ f(x) = f(x_1) = x_1 = f(x).$$

Cela étant vrai pour tout $x \in E$, on a bien $f^2 = f \circ f = f$.
($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $f \circ f = f$.
Montrons que f est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(f)$.
Pour cela, il faut commencer par montrer que ces deux espaces vectoriels sont bien supplémentaires. Soit $x \in E$, on va montrer qu'il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Ker}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Analyse supposons qu'un tel couple existe. Comme $x_1 \in \mathrm{Im}(f)$, on peut trouver $y \in E$ tel que $f(y) = x_1$, et donc $x = f(y) + x_2$. En appliquant f de nouveau, on trouve par linéarité :

$$f(x) = f \circ f(y) + f(x_2) = f \circ f(y) = f(y) = x_1.$$

Donc nécessairement, $x_1 = f(x)$ et $x_2 = x - f(x)$.

Synthèse : soit $x \in E$. On pose $x_1 = f(x)$ et $x_2 = x - f(x)$. Il est immédiat que $x_1 \in \mathrm{Im}(f)$, par ailleurs :

$$f(x_2) = f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0_E,$$

donc $x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme de plus $x = f(x) + (x - f(x)) = x_1 + x_2$, cette décomposition convient bien.

Donc $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E. Soit $x \in E$, qu'on décompose en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Im}(f)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x_2) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x_1$, on a donc puisque $f \circ f = f$:

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f \circ f(y) + 0_E = f(y) = x_1.$$

Donc f est bien le projecteur de E sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. □

Exercice 16.10 Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f((x,y)) = (4x-6y, 2x-3y).$$

Montrer que f est un projecteur en précisant ses caractéristiques.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ f((x,y)) &= f((4x-6y, 2x-3y)) = (16x-24y-12x+18y, 8x-12y-6x+9y) \\ &= (4x-6y, 2x-3y) = f((x,y)). \end{aligned}$$

Donc $f \circ f = f$ et f est un projecteur.
On va maintenant chercher son noyau et son image :

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (x,y) \in \mathrm{Ker}(f) &\Longleftrightarrow f((x,y)) = (0,0) \\ &\Longleftrightarrow (4x-6y, 2x-3y) = (0,0) \\ &\Longleftrightarrow 2x-3y = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x,y) = \frac{x}{3}(3,2) \\ &\Longleftrightarrow (x,y) \in \mathrm{Vect}((3,2)) \end{aligned}$$

  Ce qui nous donne par double inclusion $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((3,2))$.

- Soit $u \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$u = f((x,y)) = (4x-6y, 2x-3y) = x(4,2) + y(-6,-3)$$

  Or $(4,2) = f((1,0)) \in \mathrm{Im}(f)$ et $(-6,-3) = f((0,1)) \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $((4,2),(-6,-3))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((4,2),(-6,-3))$. On cherche maintenant à simplifier au maximum cette expression. On remarque que $(-6,-3) = -\frac{3}{2}(4,2)$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((4,2))$.

On en conclut que f est le projecteur sur $\mathrm{Vect}((4,2))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((3,2))$.
A noter, pour l'image, comme il s'agit d'un projecteur, on pouvait aussi chercher $\mathrm{Ker}(f - Id)$.