15. Intégration sur un segment

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie.

Isocrate

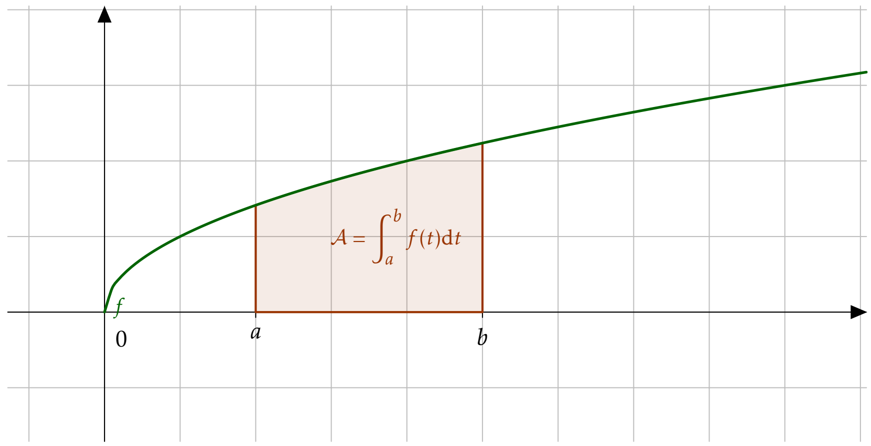
Dans ce chapitre, nous introduisons la notion d'intégrale d'une fonction comme l'aire sous la courbe de ladite fonction.Dans un deuxième temps, la notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle est introduite pour fournir un outil efficace de calculs des intégrales. Nous verrons plus particulièrement différentes techniques de calculs d'intégrales ainsi que les propriétés qui découlent des intégrales. Nous étudierons à travers des exemples des suites et des fonctions définies par une intégrale.

15.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

15.1.1 Définition

Définition 15.1 Soit a, b deux réels tels que $a \leqslant b$ et soit f une fonction continue positive sur $[a, b]$.
On appelle **intégrale** de f entre a et b l'aire de la surface comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

L'intégrale de f entre a et b sera notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



Définition 15.2 Soit a, b deux réels tels que $a \leqslant b$ et soit f une fonction continue négative sur $[a, b]$.
On appelle **intégrale** de f entre a et b l'opposé de l'aire de la surface comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.
L'intégrale de f entre a et b sera notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque : La lettre utilisée pour la notation de l'intégrale est une variable muette

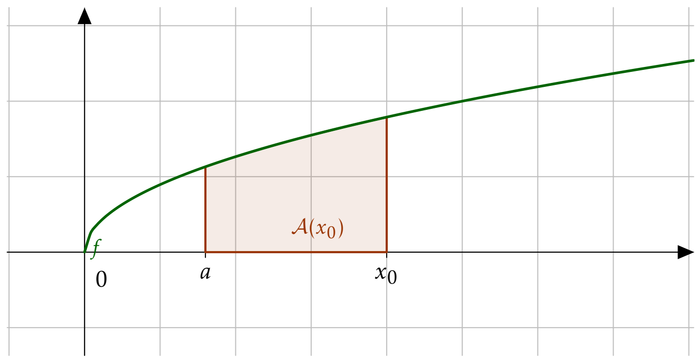
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y \ldots$$

Par abus de langage, on écrit parfois $\displaystyle\int_a^b f$.

Remarque : Soit a, b deux réels tels que $a \leqslant b$ et soit f une fonction continue sur $[a, b]$ de signe quelconque.
On appelle **intégrale** *de f entre a et b la somme des aires comprises entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$, comptées positivement si la courbe de f est au-dessus de l'axe des abscisses et comptées négativement si la courbe de f est en-dessous de l'axe des abscisses.*

15.1.2 Aire sous la courbe d'une fonction positive

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. Pour $x_0 \in [a;b]$, on pose $\mathcal{A}(x_0) = \displaystyle\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t$. Par définition, la quantité $\mathcal{A}(x_0)$ correspond à l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équation respective $x = a$ et $x = x_0$:



Théorème 15.1 La fonction $\mathcal{A} : \begin{cases} [a;b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathcal{A}(x) \end{cases}$ est dérivable sur $[a;b]$ et :

$$\forall x \in [a;b], \quad \mathcal{A}'(x) = f(x).$$

Démonstration.

□

15.2 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 15.3 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive de la fonction** f **sur** I si F est dérivable et si :

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Exemple 15.1

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de
- $G : x \mapsto \mathrm{e}^x - 2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de
- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $H : x \mapsto x^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de
- Reprenons la fonction $\mathcal{A}$ de la Partie 15.1.2, c'est une primitive de f sur $[a, b]$.

Remarque :

- *Comme F est dérivable sur I, la fonction F est en particulier continue sur I.*
- *Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f. C'est pourquoi on parle* ***d'une*** *primitive de la fonction f et non de* **la** *primitive de la fonction f.*

Théorème 15.2

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est de la forme $F + c$ où c est une constante.
- Il existe **une unique** primitive de f sur I égale à une valeur donnée en un point donné. Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple 15.2 La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 - 1$ est une primitive de

Exercice 15.1 Déterminer la primitive φ sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 6x + 4$ telle que $\varphi(1) = 5$.

Primitives usuelles

Pour rechercher des primitives, on utilise les formules connues pour la dérivation, et les dérivées connues. Les formules suivantes sont valables sur tout intervalle où la fonction est continue. Par ailleurs, C désigne une constante réelle.

Fonctions	Primitives	Fonctions	Primitives
A (constante)	$Ax+C$		
x^α $(\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$u'u^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C$
En particulier si $\alpha=-2$, $\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}+C$
En particulier si $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+C$	$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|+C$
e^x	e^x+C	$u'e^u$	e^u+C
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$	$u'\cos(u)$	$\sin(u)+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$	$u'\sin(u)$	$-\cos(u)+C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)+C$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)+C$

Exemple 15.3

- Déterminer les primitives de la fonction f définie par $f(x)=xe^{x^2}$.

- Déterminer les primitives de la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

- Déterminer les primitives de la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}-1}$.

- Déterminer les primitives de la fonction i définie par $i(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$.

- Déterminer les primitives de la fonction j définie par $j(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+3)^4}$.

- Déterminer les primitives de la fonction k définie par $k(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

15.3 Intégration sur un segment

15.3.1 Lien entre primitives et intégrales

Théorème 15.3 (Fondamental) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$ alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.
En particulier, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $F' = f$.

Proposition 15.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive quelconque de f sur I. Alors pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque : Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple 15.4

1. $\displaystyle\int_1^3 3t^2 + 2t - 1\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$

Proposition 15.2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I. On a alors :

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

□

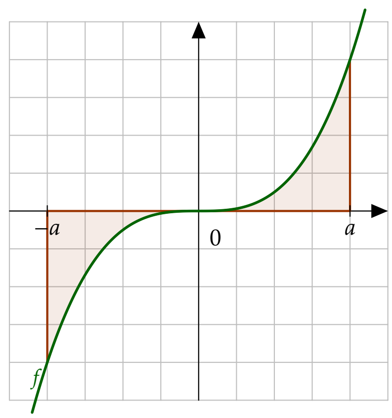
Proposition 15.3

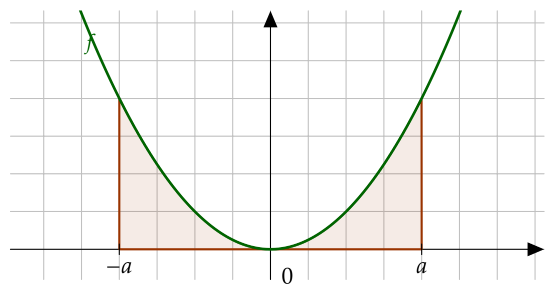
- Si f est continue et paire sur $[-a;a]$, alors :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t.$$

- Si f est continue et impaire sur $[-a;a]$ alors :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$





Exemple 15.5

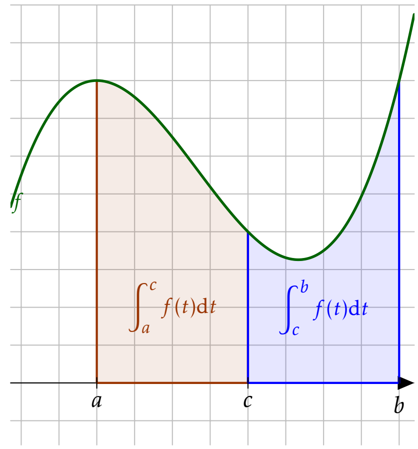
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^3\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{|t|}\mathrm{d}t$

15.3.2 Premières propriétés de l'intégrale

Proposition 15.4 (Relation de Chasles) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I. Alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$



Exemple 15.6 $\int_{-1}^{1} |t|\mathrm{d}t$

Exercice 15.2 Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-2}^{3} |t-1|\mathrm{d}t.$$

Remarque : On peut généraliser la relation de Chasles. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, soit $a_i \in I$ tels que $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. On a alors :

$$\int_{a_0}^{a_n} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t.$$

Par exemple, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 15.5 (Linéarité de l'intégrale) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, soient a et b dans I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \lambda f(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque : Plus généralement, si $f_1,\ldots,f_n$ sont des fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b et si $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont des réels, on a:

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_a^b f_k(t)\mathrm{d}t.$$

15.4 Calculs d'intégrales

15.4.1 Primitives usuelles

On trouve directement une primitive de la fonction à intégrer grâce au tableau des primitives usuelles :

Exemple 15.7

- $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t$

- $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}\,\mathrm{d}t$

Exemple 15.8

- $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

15.4.2 Intégration par parties

Proposition 15.6 Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et soient a et b dans I. Alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

□

Exemple 15.9 Calcul de $I_1 = \displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

Exemple 15.10 Calcul d'une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

15.4.3 Changement de variables

Proposition 15.7 Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha;\beta]$ telle que $u([\alpha;\beta]) \subseteq [a;b]$. Alors :

$$\int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

□

Méthode 15.1 En pratique :

1. on pose le changement de variable $t = u(x)$.
2. on calcule l'élément différentiel : $\mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x$
3. on détermine la nouvelle fonction à intégrer : $f(u(x)) = f(t)$
4. on détermine les nouvelles bornes de l'intégrale :
   - si $x = \alpha$ alors $t = u(\alpha)$
   - si $x = \beta$ alors $t = u(\beta)$

Exemple 15.11 Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = 2x+1$.

15.5 Propriétés de l'intégrale

Intégrales et inégalités

On suppose dans cette partie que $a \leqslant b$.

Proposition 15.8 (Positivité de l'intégrale)

- Si f est continue et positive sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- Si f est continue et positive sur $[a;b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a;b]$.

Remarque : En particulier, si f est continue, positive et non identiquement nulle sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$.

Proposition 15.9 (Croissance de l'intégrale) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que : $\forall t \in [a;b], f(t) \leqslant g(t)$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 15.3 Montrer que $0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}$.

Proposition 15.10 (Inégalité triangulaire) Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Alors:

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Application à l'étude de suites d'intégrales

Exercice 15.4 Pour tout entier naturel n, on définit :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.$$

1. On admet que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$. Montrer que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$.
2. En déduire la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.

2.

Exercice type 15.1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
2. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Corrigé:

1.

2.

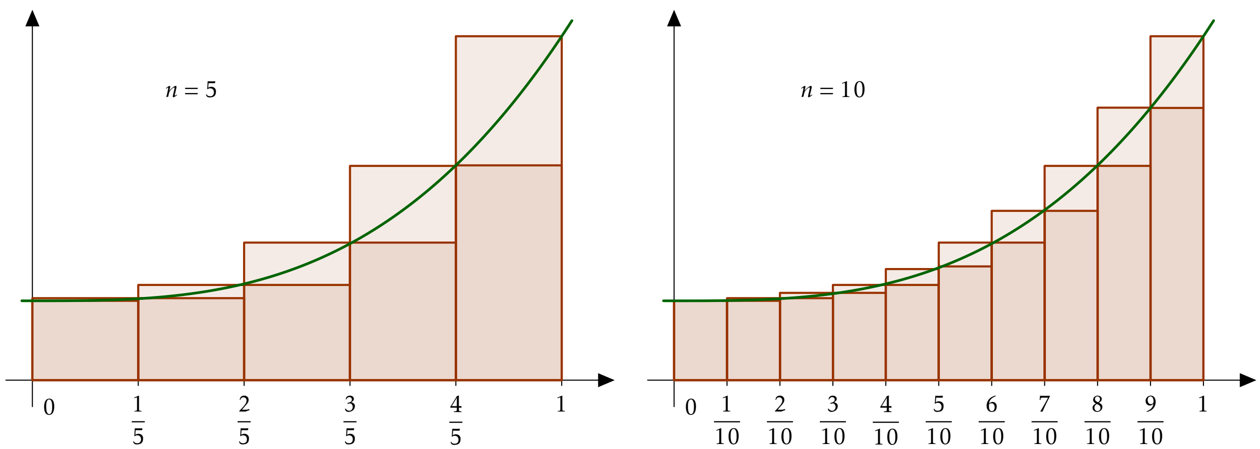
3.

4.

15.6 Méthode des rectangles et Sommes de Riemann

Comme l'intégrale de f entre a et b correspond à l'aire de la surface comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$, il est intéressant de remarquer qu'en approchant l'aire sous la courbe par des aires de rectangles, on peut avoir des valeurs approchées d'intégrales.
Cas particulier important : $a = 0$ et $b = 1$.

- $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, cette quantité correspond à la somme des aires des «grands rectangles».
- $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, cette quantité correspond à la somme des aires des «petits rectangles».



Définition 15.4 Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **sommes de Riemann** associées à la fonction f sur $[a;b]$ les sommes suivantes :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Théorème 15.4 Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ alors les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque :

- *En particulier,* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
- S_n *fournit une valeur approchée de* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *dès que* n *est suffisamment grand.*

Démonstration.

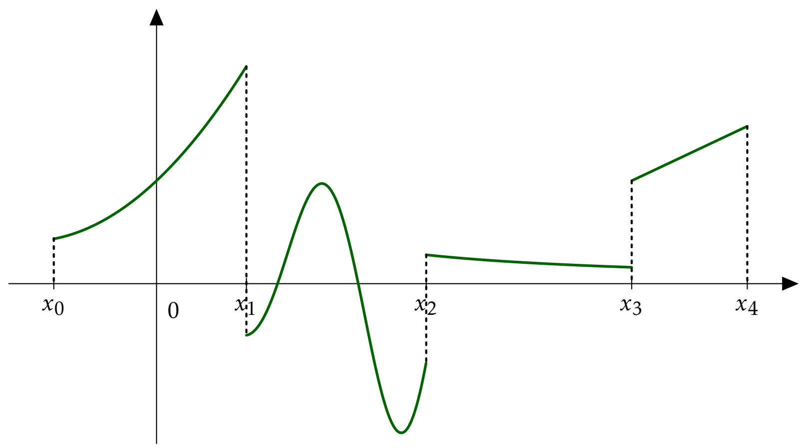
□

Exercice type 15.2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrer que la suite (S_n) converge et déterminer la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

15.7 Compléments

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 15.5
- Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur $[a;b]$ lorsque f est continue sur $[a;b]$ sauf en un nombre fini de points $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ de $[a;b]$, en lesquels la fonction f admet une limite finie à gauche et à droite.
- On pose $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$. Pour $i \in [\![0;n]\!]$, on note f_i la restriction de f à l'intervalle $]x_i;x_{i+1}[$. Le n-uplet $(x_1;\cdots;x_n)$ s'appelle une **subdivision adaptée** à la fonction f.



Définition 15.6 Pour $i \in [\![0;n]\!]$, on note $\tilde{f}_i$ le prolongement par continuité de f_i à l'intervalle $[x_i;x_{i+1}]$. Alors, l'intégrale de f sur $[a;b]$ est définie par :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}_i(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 15.5 Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x) = (x-1)\lfloor x^2 \rfloor$.

1. Montrer que f est continue par morceaux.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t$.

1.

2.

<u>Remarque</u> : Toutes les propriétés vues précédemment portant sur la linéarité de l'intégrale, la relation de Chasles, la positivité et la croissance de l'intégrale ***restent vraies****.*

Fonction définie par une intégrale

Le Théorème fondamental 15.3 peut être utilisé pour étudier les fonctions définies par une intégrale.

Exemple 15.12 Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier son sens de variation.

Proposition 15.11 Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, à valeurs dans J et soit f une fonction continue sur J. La fonction φ définie sur I par :

$$\forall x \in I, \qquad \varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t,$$

est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \qquad \varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Démonstration.

□

Exemple 15.13 Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \int_{x^2}^{x^3} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.