15. Intégration sur un segment

15.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment 1
- 15.1.1 Définition
- 15.1.2 Aire sous la courbe d'une fonction positive

15.2 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle 5

15.3 Intégration sur un segment 8
- 15.3.1 Lien entre primitives et intégrales
- 15.3.2 Premières propriétés de l'intégrale

15.4 Calculs d'intégrales 11
- 15.4.1 Primitives usuelles
- 15.4.2 Intégration par parties
- 15.4.3 Changement de variables

15.5 Propriétés de l'intégrale 15

15.6 Méthode des rectangles et Sommes de Riemann 19

15.7 Compléments 22

> Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie.
>
> *Isocrate*

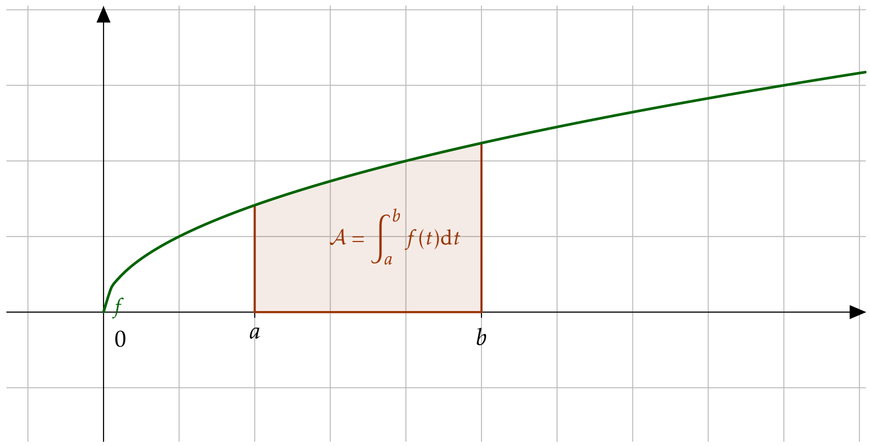
Dans ce chapitre, nous introduisons la notion d'intégrale d'une fonction comme l'aire sous la courbe de ladite fonction.Dans un deuxième temps, la notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle est introduite pour fournir un outil efficace de calculs des intégrales. Nous verrons plus particulièrement différentes techniques de calculs d'intégrales ainsi que les propriétés qui découlent des intégrales. Nous étudierons à travers des exemples des suites et des fonctions définies par une intégrale.

15.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

15.1.1 Définition

Définition 15.1 Soit a, b deux réels tels que $a \leqslant b$ et soit f une fonction continue positive sur $[a, b]$.
On appelle **intégrale** de f entre a et b l'aire de la surface comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

L'intégrale de f entre a et b sera notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



Définition 15.2 Soit a, b deux réels tels que $a \leqslant b$ et soit f une fonction continue négative sur $[a, b]$.
On appelle **intégrale** de f entre a et b l'opposé de l'aire de la surface comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.
L'intégrale de f entre a et b sera notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque : La lettre utilisée pour la notation de l'intégrale est une variable muette

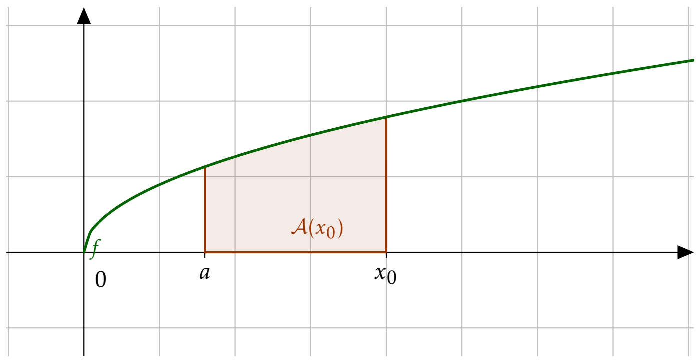
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y \ldots$$

Par abus de langage, on écrit parfois $\displaystyle\int_a^b f$.

Remarque : Soit a, b deux réels tels que $a \leqslant b$ et soit f une fonction continue sur $[a, b]$ de signe quelconque.
*On appelle **intégrale** de f entre a et b la somme des aires comprises entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$, comptées positivement si la courbe de f est au-dessus de l'axe des abscisses et comptées négativement si la courbe de f est en-dessous de l'axe des abscisses.*

15.1.2 Aire sous la courbe d'une fonction positive

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. Pour $x_0 \in [a;b]$, on pose $\mathcal{A}(x_0) = \displaystyle\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t$. Par définition, la quantité $\mathcal{A}(x_0)$ correspond à l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équation respective $x = a$ et $x = x_0$:



Théorème 15.1 La fonction $\mathcal{A} : \left\{ \begin{array}{ccc} [a;b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathcal{A}(x) \end{array} \right.$ est dérivable sur $[a;b]$ et :

$$\forall x \in [a;b], \quad \mathcal{A}'(x) = f(x).$$

Démonstration. On démontre ce théorème dans le cas où f est une fonction continue et strictement croissante.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, montrons que $\mathcal{A}$ est dérivable en x_0 et que $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$. Pour cela, montrons que le taux d'accroissement

$$\frac{\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)}{h}$$

possède une limite finie quand h tend vers 0.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, commençons par encadrer la quantité $\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)$. La quantité $\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)$ correspond à une aire et on la majore par l'aire du rectangle de hauteur $f(x_0+h)$ et on la minore par l'aire du rectangle de hauteur $f(x_0)$. On a donc :

$$f(x_0)(x_0+h-x_0) \leqslant \mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0) \leqslant f(x_0+h)(x_0+h-x_0),$$

ainsi on a :

$$hf(x_0) \leqslant \mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0) \leqslant hf(x_0+h).$$

Avant de diviser ces inégalités par h, il faut distinguer les cas $h > 0$ ou $h < 0$.
Si $h > 0$, on a alors :

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$

Faisant tendre h vers 0^+, on obtient que $\lim\limits_{h\to 0^+} f(x_0+h) = f(x_0)$ car f est continue en x_0. On conclut par théorème d'encadrement que :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Il reste donc à calculer la limite à gauche de 0 et il s'agit du cas $h < 0$. On a alors :

$$f(x_0 + h) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0).$$

Faisant tendre h vers 0^-, on obtient que $\lim\limits_{h \to 0^-} f(x_0 + h) = f(x_0)$ car f est continue en x_0. On conclut par théorème d'encadrement que :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0).$$

On a donc montré que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0),$$

ainsi la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable en x_0 et $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

15.2 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 15.3 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive de la fonction f sur I** si F est dérivable et si :

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Exemple 15.1

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.
- $G : x \mapsto \mathrm{e}^x - 2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$.
- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $H : x \mapsto x^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$.
- Reprenons la fonction $\mathcal{A}$ de la Partie 15.1.2, c'est une primitive de f sur $[a, b]$.

Remarque :

- *Comme F est dérivable sur I, la fonction F est en particulier continue sur I.*
- *Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f. C'est pourquoi on parle **d'une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f.*

Théorème 15.2

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est de la forme $F + c$ où c est une constante.
- Il existe **une unique** primitive de f sur I égale à une valeur donnée en un point donné. Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple 15.2 La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 - 1$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $F(1) = 0$.

Exercice 15.1 Déterminer la primitive φ sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 6x + 4$ telle que $\varphi(1) = 5$.
On a $f(x) = 3 \times 2x + 4 \times 1$, on "devine" alors une primitive de f. On a :

$$F_1(x) = 3x^2 + 4x.$$

Les primitives de f sont donc de la forme : $F(x) = 3x^2 + 4x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.
On cherche alors $C \in \mathbb{R}$ tel qu'une primitive φ de f vérifie $\varphi(1) = 5$. On a $\varphi(1) = 7 + C$, on en déduit que $C = -2$. On a alors $\varphi(x) = 3x^2 + 4x - 2$.

Primitives usuelles

Pour rechercher des primitives, on utilise les formules connues pour la dérivation, et les dérivées connues. Les formules suivantes sont valables sur tout intervalle où la fonction est continue. Par ailleurs, C désigne une constante réelle.

Fonctions	Primitives	Fonctions	Primitives
A (constante)	$Ax+C$		
x^α $(\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$u'u^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C$
En particulier si $\alpha=-2$, $\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{1}{u}+C$
En particulier si $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+C$
e^x	e^x+C	$u'e^u$	e^u+C
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$	$u'\cos(u)$	$\sin(u)+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$	$u'\sin(u)$	$-\cos(u)+C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)+C$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)+C$

Exemple 15.3

- Déterminer les primitives de la fonction f définie par $f(x)=xe^{x^2}$.

  f semble être de la forme $u'e^u$ avec $u(x)=x^2$. Or $u'e^u=2xe^{x^2}$ ainsi $xe^{x^2}=\dfrac{1}{2}u'e^u$. On a donc :

  $$F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C \quad \text{avec } C\in\mathbb{R}.$$

- Déterminer les primitives de la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

  g semble être de la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=x^2+x+1$. On a : $-\dfrac{u'}{u^2}=-\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ainsi $g(x)=\dfrac{u'}{u^2}$. On a donc :

  $$G(x)=-\frac{1}{x^2+x+1}+C \quad \text{avec } C\in\mathbb{R}.$$

- Déterminer les primitives de la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$.

h semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{2x} - 1$. Or $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}-1} = h(x)$. On a donc :

$$H(x) = \ln|\mathrm{e}^{2x} - 1| + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer les primitives de la fonction i définie par $i(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$.

i semble être de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 1 + \ln(x)$. Or $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{1+\ln(x)}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{1+\ln(x)}}$. Ainsi $i(x) = 2 \times \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. On a donc :

$$I(x) = 2\sqrt{|1+\ln(x)|} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer les primitives de la fonction j définie par $j(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+3)^4}$.

j semble être de la forme $u'u^{-4}$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 3$. Or $u'u^{-4} = (2x+2)(x^2 + 2x + 3)^{-4} = 2\dfrac{x+1}{(x^2+2x+3)^4}$. Ainsi $j(x) = \dfrac{1}{2}u'u^{-4}$. On a donc :

$$J(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-4+1}(x^2+2x+3)^{-4+1} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R},$$

soit

$$J(x) = \frac{-1}{6(x^2+2x+3)^3} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer les primitives de la fonction k définie par $k(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

k semble être de la forme $u'\cos(u)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$. Or $u'\cos(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}k(x)$. Ainsi $k(x) = 2u'\cos(u)$. On a donc pour :

$$K(x) = 2\sin(\sqrt{x}) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

15.3 Intégration sur un segment

15.3.1 Lien entre primitives et intégrales

Théorème 15.3 **(Fondamental)** Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$ alors la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.
En particulier, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $F' = f$.

Proposition 15.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive quelconque de f sur I. Alors pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque : Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.
En effet, si $G = F + c$ est une autre primitive de f :

$$[G(t)]_a^b = G(b) - G(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b.$$

Exemple 15.4

1. $\int_1^3 3t^2 + 2t - 1\mathrm{d}t = \left[t^3 + t^2 - t\right]_1^3 = \left(3^3 + 3^2 - 3\right) - \left(1^3 + 1^2 - 1\right) = 33 - 1 = 32.$
2. $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^{\mathrm{e}} = \ln(\mathrm{e}) - \ln(1) = 1.$
3. $\int_{-1}^{1} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^{1} = \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e} = 0.$

Proposition 15.2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I. On a alors :

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f, d'après la Définition 15.1 précédente, on a :

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a) - F(a) = 0,$$

et

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$$

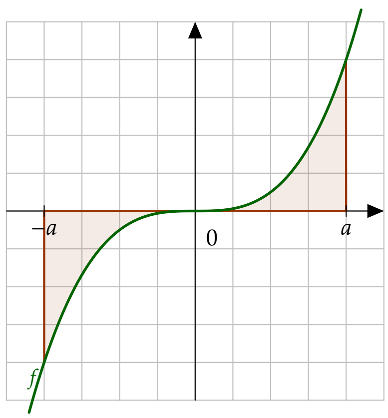
□

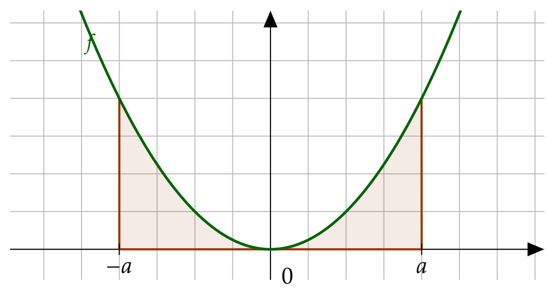
Proposition 15.3 • Si f est continue et paire sur $[-a;a]$, alors :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t.$$

• Si f est continue et impaire sur $[-a;a]$ alors :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$





Exemple 15.5 • $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^3\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 0$

En effet, la fonction $f(t) = t^3\sqrt{t^2+1}$ est une fonction impaire sur $[-1;1]$:
Son domaine de définition est bien symétrique par rapport à l'origine et on a :

$$f(-t) = (-t)^3\sqrt{(-t)^2+1} = -t^3\sqrt{t^2+1} = -f(t).$$

• $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{|t|}\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{|t|}\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = 2\left[\mathrm{e}^{t}\right]_0^1 = 2(\mathrm{e}-1).$

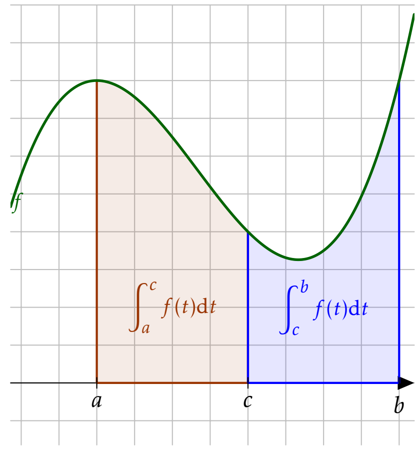
En effet, la fonction $f(t) = \mathrm{e}^{|t|}$ est une fonction paire sur $[-1;1]$:
Son domaine de définition est bien symétrique par rapport à l'origine et on a :

$$f(-t) = \mathrm{e}^{|-t|} = \mathrm{e}^{|t|} = f(t).$$

15.3.2 Premières propriétés de l'intégrale

Proposition 15.4 **(Relation de Chasles)** Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I. Alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$



Exemple 15.6 $\int_{-1}^{1} |t|\mathrm{d}t$

$$\int_{-1}^{1} |t|\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} |t|\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} |t|\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} (-t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} t\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Exercice 15.2 Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-2}^{3} |t-1|\mathrm{d}t.$$

Il nous faut nous débarrasser de la valeur absolue pour calculer cette intégrale. Commençons par remarquer que $t-1 \geqslant 0$ pour $t \geqslant 1$. Ainsi $|t-1| = t-1$ pour $t \geqslant 1$ et $|t-1| = 1-t$ pour $t \leqslant 1$. On a donc en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} |t-1|\mathrm{d}t &= \int_{-2}^{1} |t-1|\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} |t-1|\mathrm{d}t \\
&= \int_{-2}^{1} (1-t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} (t-1)\mathrm{d}t \\
&= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_{1}^{3} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left((-2) - \frac{(-2)^2}{2}\right) + \left(\frac{3^2}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2} - (-4) + \frac{9}{2} - 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 2 + \frac{9}{2} \\
&= \frac{13}{2}.
\end{aligned}$$

Remarque : On peut généraliser la relation de Chasles. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, soit $a_i \in I$ tels que $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. On a alors :

$$\int_{a_0}^{a_n} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t.$$

Par exemple, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 15.5 **(Linéarité de l'intégrale)** Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, soient a et b dans I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \lambda f(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque : Plus généralement, si $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels, on a:

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_a^b f_k(t)\mathrm{d}t.$$

15.4 Calculs d'intégrales

15.4.1 Primitives usuelles

On trouve directement une primitive de la fonction à intégrer grâce au tableau des primitives usuelles :

Exemple 15.7

- $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t$

$f(t)$ semble être de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^2+1$.

Or on a $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} = f(t)$. On a alors:

$$I_1 = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_1^2 = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

- $I_2 = \int_1^2 \frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}\,\mathrm{d}t$

  Une primitive de $f(t)$ est $F(t) = -\frac{1}{t^2+t+1}$ comme déterminée dans l'Exemple 16.3. On a alors :

$$I_2 = -\left[\frac{1}{t^2+t+1}\right]_1^2 = -\frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{4}{21}.$$

Exemple 15.8

- $I_3 = \int_1^2 \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

  On a $f(t) = \frac{1}{t} \times \ln(t)$ et donc semble être de la forme $u'u$ avec $u(t) = \ln(t)$. Or on a $u'u = \frac{1}{t}\ln(t) = f(t)$. On a alors :

$$I_3 = \left[\frac{1}{1+1}(\ln(t))^{1+1}\right]_1^2 = \frac{(\ln(2))^2}{2}.$$

15.4.2 Intégration par parties

Proposition 15.6 Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et soient a et b dans I. Alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. On a: $(uv)' = u'v + uv'$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, donc $(uv)'$ et $u'v+uv'$ sont continues sur I.

En intégrant entre a et b, on a alors: $\int_a^b (uv)'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \big(u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\big)\mathrm{d}t.$

Par linéarité de l'intégrale, on a: $\int_a^b (uv)'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$

Or une primitive de $(uv)'$ est par exemple uv, donc $\int_a^b (uv)'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b.$

Ainsi $[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$, d'où le résultat. □

Exemple 15.9 Calcul de $I_1 = \displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

Posons $\begin{cases} u(t) & = t \\ v'(t) & = \mathrm{e}^t \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) & = 1 \\ v(t) & = \mathrm{e}^t \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0;1]$ donc par intégration par parties:

$$I_1 = \int_0^1 t \times \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

$$= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

$$= \left[\mathrm{e}^t \times t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{e} - \left[\ \mathrm{e}^t\ \right]_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$$

Exemple 15.10 Calcul d'une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $\ln$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$ en est une primitive. C'est l'unique primitive de $\ln$ qui s'annule en 1. Calculons cette intégrale grâce à une intégration par parties.

Posons $\begin{cases} u(t) & = \ln(t) \\ v'(t) & = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) & = \dfrac{1}{t} \\ v(t) & = t \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;x]$ donc par intégration par parties:

$$I_2 = \int_1^x 1 \times \ln(t)\mathrm{d}t = \int_1^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

$$= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t\mathrm{d}t$$

$$= x\ln(x) - 0 - (x-1) = x\ln(x) - x + 1$$

Les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $\ln$ sont les fonctions $x \mapsto x\ln(x) - x + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

15.4.3 Changement de variables

Proposition 15.7 Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha;\beta]$ telle que $u([\alpha;\beta]) \subseteq [a;b]$. Alors :

$$\int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Toutes les fonctions sont continues donc les intégrales ont bien un sens. Soit F une primitive de f et $G = F \circ u$; alors F et G sont de classe C^1 et

$$G'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x)$$

D'où

$$\int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta G'(x)\mathrm{d}x = G(\beta) - G(\alpha) = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)\mathrm{d}t.$$

□

Méthode 15.1 En pratique :

1. on pose le changement de variable $t = u(x)$.
2. on calcule l'élément différentiel : $\mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x$
3. on détermine la nouvelle fonction à intégrer : $f(u(x)) = f(t)$
4. on détermine les nouvelles bornes de l'intégrale :
   - si $x = \alpha$ alors $t = u(\alpha)$
   - si $x = \beta$ alors $t = u(\beta)$

Exemple 15.11 Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = 2x+1$.
Corrigé:

1. On pose le changement de variable : $t = 2x+1 = u(x)$. Ainsi, $x = \dfrac{t-1}{2}$.
   La fonction $u : x \mapsto 2x+1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et $\forall x \in [0;1],\ u'(x) = 2$.
2. On calcule l'élément différentiel : $\mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.
3. On détermine la nouvelle fonction à intégrer :
   $$\frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x = \frac{\frac{t-1}{2}}{\sqrt{t}}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times \frac{t-1}{\sqrt{t}}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t.$$
4. On détermine les nouvelles bornes de l'intégrale :
   - Si $x = 0$ alors $t = 1$.
   - Si $x = 1$ alors $t = 3$.

   Donc, par changement de variable, on obtient :
   $$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_1^3 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t.$$

Il reste à calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$.
Par linéarité de l'intégrale, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t &= \int_1^3 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^3 t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t - \int_1^3 t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^3 - \left[\frac{t^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right]_1^3 \\
&= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 - \left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^3 \\
&= \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^3 - \left[2\sqrt{t}\right]_1^3 \\
&= \frac{2}{3}\times 3\sqrt{3} - \frac{2}{3} - 2\sqrt{3} + 2 \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Et finalement,

$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\times\frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

15.5 Propriétés de l'intégrale

Intégrales et inégalités

On suppose dans cette partie que $a \leqslant b$.

Proposition 15.8 (Positivité de l'intégrale)

- Si f est continue et positive sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- Si f est continue et positive sur $[a;b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a;b]$.

Remarque : En particulier, si f est continue, positive et non identiquement nulle sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$.

Proposition 15.9 (Croissance de l'intégrale) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que : $\forall t \in [a;b], f(t) \leqslant g(t)$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 15.3 Montrer que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}$.

Pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$.
Par produit de ces deux encadrements positifs, on obtient : $0 \leqslant x\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$.
Comme $0 < 1$, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}\mathrm{d}x.$$

Il reste à calculer : $\displaystyle\int_0^1 0\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}\mathrm{d}x = (1-0)\mathrm{e} = \mathrm{e}$. D'où le résultat.

Proposition 15.10 (Inégalité triangulaire) Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Alors:

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Application à l'étude de suites d'intégrales

Exercice 15.4 Pour tout entier naturel n, on définit :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.$$

1. On admet que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$.
2. En déduire la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Corrigé

1. Soit n un entier naturel. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, elle l'est aussi sur $[n;n+1]$. Ainsi, pour tout réel $t \in [n;n+1]$, on a :

   $$f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n).$$

   Intégrons ces inégalités sur $[n,n+1]$, comme $n \leqslant n+1$, on obtient par croissance de l'intégrale :

   $$\int_n^{n+1} f(n+1)\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\mathrm{d}t$$

Or
$$\int_n^{n+1} f(n+1)\mathrm{d}t = f(n+1)(n+1-n) = f(n+1)$$
et de même
$$\int_n^{n+1} f(n)\mathrm{d}t = f(n),$$
ainsi on obtient :
$$f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n).$$

2. Remarquons que:
$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} = 0$$
et
$$\lim_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1} + \mathrm{e}^{-(n+1)}} = 0\,.$$
D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite (I_n) converge, et que sa limite vaut 0.

Exercice type 15.1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
2. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Corrigé:

1. Comme la fonction exponentielle est croissante, on remarque que $\forall t \in [0;1]$:
$$0 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^1.$$
Comme $t^n \geqslant 0$, on a :
$$0 \leqslant t^n \mathrm{e}^t \leqslant t^n \mathrm{e}.$$
Par croissance de l'intégrale, en intégrant l'inégalité précédente entre 0 et 1, on obtient :
$$\int_0^1 0 \leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}t^n \mathrm{d}t,$$
soit
$$0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 t^n \mathrm{d}t.$$
Or
$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n \mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi on a :
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

2. On a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ donc par théorème d'encadrement, on montre que la suite $(I_n)_n$ est convergente et qu'elle converge vers 0.

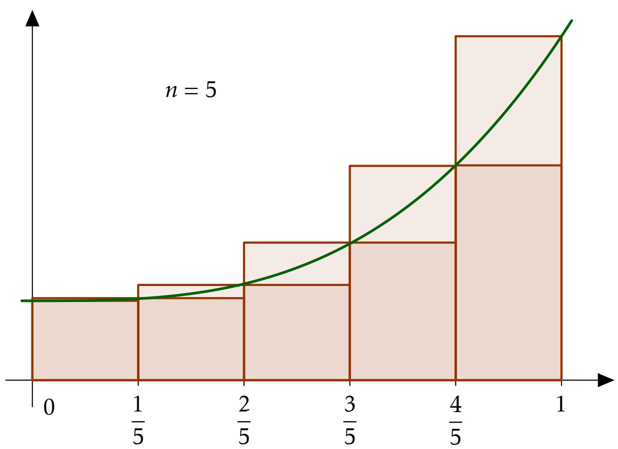
3. On a : $I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$. On effectue alors une intégration par parties.
   Posons $\begin{cases} u(t) & = t^{n+1} \\ v'(t) & = \mathrm{e}^t \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) & = (n+1)t^n \\ v(t) & = \mathrm{e}^t \end{cases}$.
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0;1]$ donc par intégration par parties:
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[t^{n+1}\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^1 - (n+1)I_n. \end{aligned}$$
   Ainsi $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

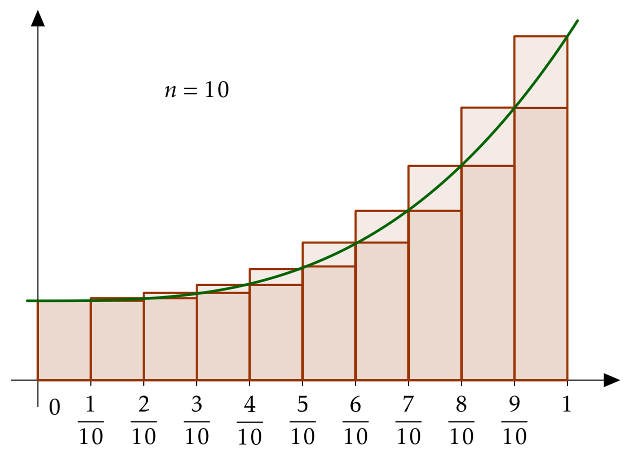
4. Avec la relation de récurrence déterminée précédemment, on obtient que :
$$nI_n = \mathrm{e} - I_n - I_{n+1}.$$
   Or $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$. On obtient alors que
$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \mathrm{e}.$$

15.6 Méthode des rectangles et Sommes de Riemann

Comme l'intégrale de f entre a et b correspond à l'aire de la surface comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$, il est intéressant de remarquer qu'en approchant l'aire sous la courbe par des aires de rectangles, on peut avoir des valeurs approchées d'intégrales.
Cas particulier important : $a = 0$ et $b = 1$.

- $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, cette quantité correspond à la somme des aires des «grands rectangles».
- $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, cette quantité correspond à la somme des aires des «petits rectangles».





Définition 15.4 Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **sommes de Riemann** associées à la fonction f sur $[a;b]$ les sommes suivantes :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Théorème 15.4 Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ alors les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque :

- *En particulier,* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
- S_n *fournit une valeur approchée de* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *dès que* n *est suffisamment grand.*

Démonstration. On démontre le théorème dans le cas d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$.
Pour montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, il est équivalent de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = 0.$$

Une première astuce est d'utiliser la relation de Chasles pour écrire que :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t.$$

La deuxième astuce est de remarquer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t \right) \right| \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t \right| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right)\mathrm{d}t \right| \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \mathrm{d}t \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}
\end{aligned}$$

L'idée est d'utiliser l'inégalité des accroissements finis pour majorer la quantité $\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$.
Comme $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$, la fonction f' est continue sur $[0,1]$. Comme $[0,1]$ est un segment, la fonction f' y est bornée (et elle atteint ses bornes). Il existe donc une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant M$. Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on a $\forall t \in [0,1]$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$,

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant M \left| t - \frac{k}{n} \right|.$$

On injecte cela dans nos inégalités précédentes et on obtient:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &\leqslant M\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|t-\frac{k}{n}\right|\mathrm{d}t \\ &\leqslant M\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{1}{n}\mathrm{d}t \quad \text{car pour } t\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right], \left|t-\frac{k}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n} \\ &\leqslant M\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)\times\frac{1}{n}=\frac{M}{n}.\end{aligned}$$

En résumé,

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M}{n}=0$ donc d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = 0.$$

□

Exercice type 15.2 Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k}$. Montrer que la suite (S_n) converge et déterminer la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On remarque que :

$$S_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n(1+\frac{k}{n})}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

avec f la fonction définie par $f(t)=\frac{1}{1+t}$.

Ainsi, d'après le Théorème 15.4, la suite (S_n) converge vers $\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$. Or on a:

$$\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=[\ln(1+t)]_0^1=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2).$$

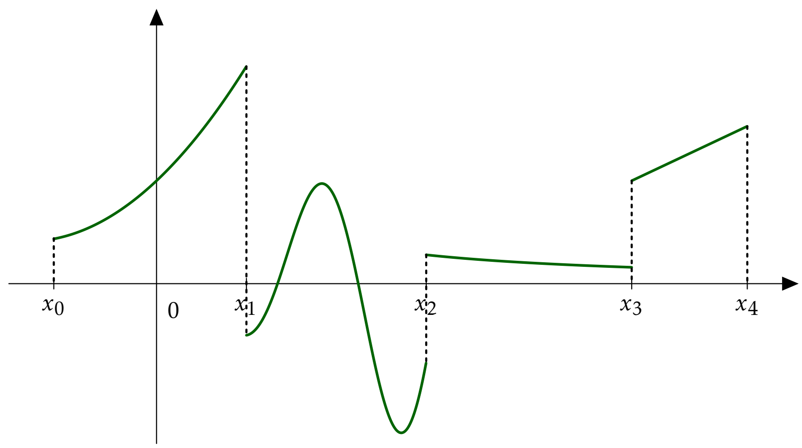
Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

15.7 Compléments

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 15.5

- Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur $[a;b]$ lorsque f est continue sur $[a;b]$ sauf en un nombre fini de points $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ de $[a;b]$, en lesquels la fonction f admet une limite finie à gauche et à droite.
- On pose $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$. Pour $i \in [\![0;n]\!]$, on note f_i la restriction de f à l'intervalle $]x_i;x_{i+1}[$. Le n-uplet $(x_1;\cdots;x_n)$ s'appelle une **subdivision adaptée** à la fonction f.



Définition 15.6 Pour $i \in [\![0;n]\!]$, on note $\tilde{f}_i$ le prolongement par continuité de f_i à l'intervalle $[x_i;x_{i+1}]$. Alors, l'intégrale de f sur $[a;b]$ est définie par :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}_i(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 15.5 Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x) = (x-1)\lfloor x^2 \rfloor$.

1. Montrer que f est continue par morceaux.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t$.

1. Si $x \in [1;2]$ alors $x^2 \in [1;4]$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant x^2 < 2 &\iff 1 \leqslant x < \sqrt{2} \\ 2 \leqslant x^2 < 3 &\iff \sqrt{2} \leqslant x < \sqrt{3} \\ 3 \leqslant x^2 < 4 &\iff \sqrt{3} \leqslant x < 2 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [1;2]$, on a :

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in [1;\sqrt{2}[\\ 2(x-1) & \text{si } x \in [\sqrt{2};\sqrt{3}[\\ 3(x-1) & \text{si } x \in [\sqrt{3};2[\\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}.$$

Sur chacun des intervalles $]1;\sqrt{2}[$, $]\sqrt{2};\sqrt{3}[$ et $]\sqrt{3};2[$, la fonction f est continue. De plus, elle admet une limite à gauche en 1, des limites à gauche et à droite en $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, et une limite à droite en 2. Donc, f est bien continue par morceaux.

2. On a

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(t)\mathrm{d}t &= \int_1^{\sqrt{2}} (t-1)\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2(t-1)\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{3}}^{2} 3(t-1)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_1^{\sqrt{2}} + 2\left[\frac{t^2}{2} - t\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + 3\left[\frac{t^2}{2} - t\right]_{\sqrt{3}}^{2} \\ &= -2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

<u>Remarque</u> : *Toutes les propriétés vues précédemment portant sur la linéarité de l'intégrale, la relation de Chasles, la positivité et la croissance de l'intégrale* ***restent vraies****.*

Fonction définie par une intégrale

Le Théorème fondamental 15.3 peut être utilisé pour étudier les fonctions définies par une intégrale.

Exemple 15.12 Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier son sens de variation.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car $1+t^2 \neq 0$. Ainsi d'après la proposition précédente, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Clairement, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$ ce qui implique $\varphi'(x) > 0$ et la fonction φ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition 15.11 Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, à valeurs dans J et soit f une fonction continue sur J. La fonction φ définie sur I par :

$$\forall x \in I, \qquad \varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t,$$

est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \qquad \varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Démonstration. Soit F une primitive de f, comme f et continue sur J, la fonction F est dérivable sur J. De plus, on a :

$$\varphi(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

La fonction φ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables sur I et on a :

$$\varphi'(x) = v'(x) \times F'(v(x)) - u'(x) \times F'(u(x)).$$

Or par définition d'une primitive, $F' = f$, d'où la relation demandée :

$$\varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

□

Exemple 15.13 Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \int_{x^2}^{x^3} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Soient les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = x^2 \qquad \text{et} \qquad v(x) = x^3.$$

Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
Ainsi d'après la proposition précédente, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi'(x) = 3x^2 f(x^3) - 2x f(x^2) = 3x^2 \mathrm{e}^{x^3} - 2x\mathrm{e}^{x^2}.$$