14. Variables aléatoires finies

> La fusée interplanétaire des Shadoks n'était pas très au point, mais ils avaient calculé qu'elle avait quand même une chance sur un million de marcher. Et ils se dépêchaient de bien rater les 999999 premiers essais pour être sûrs que le millionième marche.
>
> *Jacques Rouxel*

Dans ce chapitre, nous introduisons les variables aléatoires sur des univers finis. On aborde également les notions de loi, d'espérance et de variance.
De nombreuses variables aléatoires rencontrées dans les modèles mathématiques suivent un petit nombre de lois, nommées en conséquence ***lois usuelles****. Dans la dernière partie, on étudie ces lois. Les résultats pourront ensuite être réutilisés sans démonstration dans les exercices.*

Dans tout ce chapitre Ω est un univers **fini**.

14.1 Variables aléatoires

14.1.1 Définitions et exemples

Définition 14.1 On appelle **variable aléatoire réelle** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle **support** de X, et on note $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X :

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}.$$

Remarque : Puisque Ω est un univers fini, $X(\Omega)$ est fini également. On parle alors de variable aléatoire finie.

Exemple 14.1 Une expérience aléatoire consiste à lancer n fois une pièce équilibrée. On note 1 pour face et 0 pour pile. Ainsi Ω est l'ensemble des n-listes d'éléments de $\{0;1\}$.

1. On pose X_1 la fonction qui à un élément de Ω associe 1 si le premier lancer donne face, 0 sinon. $X_1(\Omega) = \{0,1\}$.
2. On pose X_2 la fonction qui à un élément de Ω associe le nombre de faces obtenus. $X_2(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
3. On pose X_3 la fonction qui à un élément de Ω associe le rang d'apparition du premier pile, s'il existe, et 0 sinon. $X_3(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

Exemple 14.2 **Tirage de jetons numérotés :** Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1 euro. On tire au hasard un jeton. Si on a le numéro 1, on gagne 4 euros, si on a un numéro pair on reçoit 2 euros et rien sinon. On note X le gain (algébrique).

X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{-1;1;3\}$
En effet, dans tous les cas, on mise 1 euro donc en début de partie, notre gain est à "-1 euro".

- Si on tire le numéro 1, on gagne 4 euros et donc notre gain est de 4-1=3 euros.
- Si on tire un numéro pair, on gagne 2 euros et donc notre gain est de 2-1=1 euro.
- Sinon on a rien, notre gain est donc de -1 euro.

Ainsi la variable aléatoire X prend les valeurs -1;1;3.

14.1.2 Événements associés à une variable aléatoire

Définition 14.2 Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega\,,\, X(\omega) = x\}$$

$$[X < x] = \{\omega \in \Omega\,,\, X(\omega) < x\}, \qquad [X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega\,,\, X(\omega) \leqslant x\}$$

$$[X > x] = \{\omega \in \Omega\,,\, X(\omega) > x\}, \qquad [X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega\,,\, X(\omega) \geqslant x\}$$

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$ alors on note $[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega\,;\, x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}$.
Plus généralement, si I désigne une partie de $\mathbb{R}$, on note : $[X \in I] = \{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \in I\}$.

Remarque : Chacun des ensembles précédents appartient à $\mathcal{P}(\Omega)$ et est donc bien un événement.

Exemple 14.3 Calculons $P([X=1])$ et $P([X \leqslant 2])$ pour la situation de l'Exemple 14.2.
Tirage de jetons numérotés.

- $P([X=1])$? :
  La variable aléatoire X prend la valeur 1 si on tire un numéro pair, c'est à dire si on tire 2 ou 4. Les tirages étant équiprobables :
  $$P([X=1]) = \frac{2}{5}.$$
- $P([X \leqslant 2])$? :
  La variable aléatoire X prend les valeurs -1;1;3. Ainsi elle est inférieure à 2, si elle prend les valeurs -1 et 1, c'est à dire :
  $$P([X \leqslant 2]) = P([X=1]) + P([X=-1])$$
  or X prend la valeur -1 lorsqu'on ne tire ni 1, ni un numéro pair, c'est à dire lorsque l'on tire 3 ou 5. On a donc :
  $$P([X \leqslant 2]) = P([X=1]) + P([X=-1]) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}.$$

Proposition 14.1 Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Alors,
$$\{[X=x]\,;\, x \in X(\Omega)\}$$
forme un système complet d'événements. En particulier, on a :
$$\sum_{x \in X(\Omega)} P([X=x]) = 1\,.$$

<u>Remarque</u> : $X(\Omega)$ étant un ensemble fini, on peut écrire $X(\Omega) = \{x_1\,;\, x_2\,;\, \cdots\,;\, x_n\}$, et la somme précédente est une somme finie. On a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P([X=x_k]) = 1$.

Démonstration. Soit $x \in X(\Omega)$, on rappelle que $[X=x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$, on a alors $[X=x] \in \mathcal{P}(\Omega)$ donc $[X=x]$ est un événement de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Si x et y sont deux éléments distincts de $X(\Omega)$, $[X=x]$ et $[X=y]$ sont incompatibles car il n'existe pas de $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = x$ et $X(\omega) = y$. De plus,
$$\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X=x] = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in X(\Omega)\} = \{\omega \in \Omega\} = \Omega.$$
Ainsi $\{[X=x]\,;\, x \in X(\Omega)\}$ forme bien un système complet d'événements. Comme les événements sont incompatibles, on a: $P(\Omega) = 1 = P\left(\displaystyle\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X=x]\right) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P([X=x])$. $\square$

Notations : L'écriture $P(X = x)$ est souvent utilisée à la place de $P([X = x])$.

Exemple 14.4 On reprend l'expérience de l'Exemple 14.2 $\{[X=-1]\,;[X=1]\,;[X=3]\}$ forme un système complet d'événements.

14.1.3 Loi d'une variable aléatoire

Définition 14.3 Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On appelle **loi** de la variable aléatoire X, la donnée des $P(X = x)$ pour tout réel $x \in X(\Omega)$.

Méthode 14.1 (Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie)

- On donne l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.
- On calcule $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Lorsque $X(\Omega)$ est fini, on résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec, sur la 1ère ligne, les valeurs prises par X, et sur la 2ème ligne les probabilité correspondantes.

Exemple 14.5 On reprend l'expérience de l'Exemple 14.2 : **Tirage de jetons numérotés.**

La loi de la variable aléatoire X est donnée par : $P(X = -1) = \frac{2}{5}$, $P(X = 1) = \frac{2}{5}$, $P(X = 3) = \frac{1}{5}$. Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

x	-1	1	3	Total
$P(X = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

Exemple 14.6 On lance 2 dés équilibrés. On considère l'application X qui à un lancer associe 2 si les deux dés prennent les valeurs 5 ou 6, 1 si seulement l'un des deux dés prend la valeur 5 ou 6 et -1 sinon.
Déterminer la loi de X.

On a $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$. On pose D_i l'événement « le i-ème dé prend la valeur 5 ou 6 ». L'indépendance des lancers permet alors les calculs des probabilités :

$$P(X = 2) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

$$P(X = -1) = P\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}\right) = P\left(\overline{D_1}\right)P\left(\overline{D_2}\right) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P\left(\left(D_1 \cap \overline{D_2}\right) \cup \left(\overline{D_1} \cap D_2\right)\right) \\ &= P\left(D_1 \cap \overline{D_2}\right) + P\left(\overline{D_1} \cap D_2\right) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

car les événements $D_1 \cap \overline{D_2}$ et $\overline{D_1} \cap D_2$ sont incompatibles.
Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

x	-1	1	2	Total
$P(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

Théorème 14.1 Considérons n réels $x_1, \cdots, x_n$ et n réels positifs $p_1, \cdots, p_n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. Alors, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega) = \{x_1; \cdots; x_n\}$ et :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad P(X = x_i) = p_i.$$

Exemple 14.7 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la n-liste $(u_1, \ldots, u_n)$ définie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par $u_i = \alpha \times i$.
Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(u_1, \ldots, u_n)$ soit la loi de probabilité de la variable aléatoire X définie par : $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\forall i \in X(\Omega)$, $P(X = i) = u_i$.

Pour tout $i \in [1, n]$, on a $u_i \geqslant 0$ si et seulement si $\alpha \geqslant 0$. Par ailleurs, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha i = \alpha \sum_{i=1}^{n} i = \alpha \frac{n(n+1)}{2}$$

ce qui est égal à 1 ssi $\alpha = \dfrac{2}{n(n+1)}$. Cette valeur étant positive, la liste définit une loi de variable aléatoire finie si et seulement si $\alpha = \dfrac{2}{n(n+1)}$.

14.1.4 Transformée d'une variable aléatoire finie

Définition 14.4 Soit X une variable aléatoire finie. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors, l'application Y définie sur Ω par $Y(\omega) = g(X(\omega))$ est une variable aléatoire finie que l'on note $g(X)$.

Exemple 14.8 1. Soit X une variable aléatoire telle que : $X(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$.
Soit g la fonction carré : $g(x) = x^2$ et $Y = g(X) = X^2$.

Les valeurs prises par $Y = X^2$ sont les images par g de -1, 0 et 1, c'est-à-dire 0 et 1. Par ailleurs, on a :

$$[Y = 0] = [X = 0] \qquad \text{et} \qquad [Y = 1] = \left[X^2 = 1\right] = [X = 1] \cup [X = -1].$$

2. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.
Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x + 3$ et $Y = g(X) = 2X + 3$.

Les valeurs prises par $Y = 2X + 3$ sont les images par g des valeurs prises par X, c'est-à-dire 5, 7, 9, 11, 13 et 15. Par ailleurs, on a :

$$[Y = 5] = [2X + 3 = 5] = [X = 1], \quad [Y = 7] = [2X + 3 = 7] = [X = 2], \text{ etc }.$$

Théorème 14.2 Soit X une variable aléatoire et soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. On note $Y = g(X)$, ainsi que $X(\Omega) = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Alors, pour tout y dans $Y(\Omega)$:

$$P(Y = y) = P(g(X) = y) = \sum_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ g(x_i) = y}} P(X = x_i).$$

Exemple 14.9 1. Soit X une variable aléatoire telle que : $X(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$. On suppose par ailleurs que :

$$P(X = -1) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 0) = \frac{1}{2}, \qquad \text{et} \quad P(X = 1) = \frac{3}{8}.$$

Soit g la fonction carré : $g(x) = x^2$ et $Y = g(X) = X^2$. Déterminer la loi de Y.

Commençons par remarquer que : $Y(\Omega) = \{0; 1\}$. On a de plus :

$$P(Y = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

et

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(X^2 = 1) = P((X = 1) \cup (X = -1)) \\ &= P(X = 1) + P(X = -1) \text{ car les événements sont disjoints} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a bien $P(Y = 0) + P(Y = 1) = 1$ et on a donc déterminé la loi de Y.

2. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.
Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x + 3$ et $Y = g(X) = 2X + 3$.
Déterminer la loi de Y.

Commençons par remarquer que $Y(\Omega) = \{5;7;9;11;13:15\}$. On a de plus :

- $P(Y = 5) = P(2X + 3 = 5) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$,
- $P(Y = 7) = P(2X + 3 = 7) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$,
- $P(Y = 9) = P(2X + 3 = 9) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$,
- $P(Y = 11) = P(2X + 3 = 11) = P(X = 4) = \frac{1}{6}$,
- $P(Y = 13) = P(2X + 3 = 13) = P(X = 5) = \frac{1}{6}$,
- $P(Y = 15) = P(2X + 3 = 15) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$.

Finalement, on observe que la variable aléatoire Y suit la même loi que la variable aléatoire X.

14.2 Moments d'une variable aléatoire finie

14.2.1 Espérance

Définition 14.5 Soit X une variable aléatoire finie avec $X(\Omega) = \{x_1 ; \cdots ; x_n\}$, on apelle **espérance**, notée $E(X)$, la quantité définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

Remarque : L'espérance s'interprète comme une moyenne.

Exemple 14.10 Reprenons la situation de l'Exemple 14.2 et calculons l'espérance de la variable aléatoire.
Tirage de jetons numérotés.

Rappelons que l'on a :

x	-1	1	3	Total
$P(X = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

Il est alors facile de calculer son espérance :

$$E(X) = (-1) \times P(X=-1) + 1 \times P(X=1) + 3 \times P(X=3) = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Proposition 14.2 **(Linéarité)** Soient X et Y deux variables aléatoires finies. Soit a et $b \in \mathbb{R}$. Alors, les espérances de $X+Y$ et de $aX+b$ sont données par :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \qquad \text{et} \qquad E(aX+b) = aE(X) + b.$$

Démonstration. Notons $X(\Omega) = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, soient $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on a

$$(aX+b)(\Omega) = \{ax_i + b\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
E(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) P(aX + b = ax_i + b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) P(aX = ax_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) P(X = x_i) \\
&= a \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) + b \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= aE(X) + b \quad \text{car} \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1.
\end{aligned}$$

Si $a = 0$, posons $Y = b$. On a alors $Y(\Omega) = \{b\}$ et $E(Y) = bP(Y = b) = b \times 1 = b$.
L'égalité $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ sera démontrée ultérieurement. □

Exemple 14.11 On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x + 3$ et $Y = g(X) = 2X + 3$.

Alors $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et le dé étant non truqué, on est en situation d'équiprobabilité : $\forall k \in [\![1;6]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{6}$.
$X(\Omega)$ est fini, donc X est une variable aléatoire est finie et son espérance est donnée par:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2}.$$

$Y = 2X + 3$ est aussi une variable finie, son espérance est donnée par:

$$E(Y) = E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 7 + 3 = 10.$$

Proposition 14.3 **(Positivité)** Soit X une variable aléatoire finie. Si pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega) \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$.

Corollaire 14.1 **(Croissance)** Soient X et Y deux variables aléatoires finies. Si pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Théorème 14.3 **(de transfert)** Soit X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors, la variable aléatoire $g(X)$ a pour espérance :

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x).$$

<u>*Remarque*</u> :

- *Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X.*
- *En prenant $g(x) = ax + b$, on retrouve le résultat de la Proposition 14.2.*

Exercice 14.1 Reprenons l'Exemple 14.2 du tirage de jetons numérotés et définissons la variable aléatoire $Y = X^2$. Calculer l'espérance de Y.

D'après le théorème de transfert, on a :

$$E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) = (-1)^2 P(X = -1) + 1^2 P(X = 1) + 3^2 P(X = 3) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + 9 \times \frac{1}{5} = \frac{13}{5}.$$

14.2.2 Moments d'ordre r

Définition 14.6 Soit X une variable aléatoire finie. Le **moment d'ordre** r (avec $r \in \mathbb{N}^*$) de X est le réel $m_r(X) = E(X^r)$.

<u>*Remarque*</u> :

- *Une variable aléatoire finie admet des moments de tous ordres et par le théorème de transfert :*

$$m_r(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^r P(X = x_i) \qquad \text{avec } X(\Omega) = \{x_1 ; \cdots ; x_n\}.$$

- *L'espérance de X est le moment d'ordre 1 de X.*

Exemple 14.12 On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X le numéro obtenu. Alors, $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;6]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{6}$.
X est une variable aléatoire finie, donc elle admet des moments de tout ordre. Elle admet par exemple un moment d'ordre 2, et

$$m_2(X) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{91}{6}.$$

14.2.3 Variance

Définition 14.7 Soit X une variable aléatoire finie avec $X(\Omega) = \{x_1\,; x_2\,; \cdots ; x_n\}$, on appelle variance de X, notée $V(X)$, la quantité définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i).$$

Remarque :

- *On a* $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.
- *La variance est un réel* ***positif ou nul***.
- *La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.*

Exemple 14.13 Calculer la variance de la variable aléatoire X de l'Exemple 14.2.
Tirage de jetons numérotés.
Rappelons que l'on a :

x	-1	1	3	Total
$P(X = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

Il est alors facile de calculer sa variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(-1 - \frac{3}{5}\right)^2 P(X = -1) + \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 P(X = 1) + \left(3 - \frac{3}{5}\right)^2 P(X = 3) \\ &= \left(-\frac{8}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5} + \left(\frac{12}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{128}{125} + \frac{8}{125} + \frac{144}{125} \\ &= \frac{56}{25}. \end{aligned}$$

Théorème 14.4 **(Formule de König-Huygens)** Soit X une variable aléatoire finie alors sa variance vérifie :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) \\
&= E\left(X^2 + E(X)^2 - 2E(X)X\right) \\
&= E\left(X^2\right) + E(X)^2 - (2E(X))E(X) \quad \text{par linéarité de l'espérance,} \\
&= E\left(X^2\right) + E(X)^2 - 2E(X)^2 \\
&= E\left(X^2\right) - E(X)^2
\end{aligned}$$

□

Exemple 14.14 Reprenons l'exemple du Tirage de jetons numérotés.

Nous avons déjà calculé $E(X^2)$ et $E(X)$, il ne nous reste plus qu'à utiliser la formule de König-Huygens.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{13}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{65-9}{25} = \frac{56}{25}$$

Exemple 14.15 Reprenons l'exemple du lancer de dé à 6 faces non truqué. On note X le numéro obtenu. Calculer la variance de X.

D'après la formule de König-Huygens, on a : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Or nous avons calculé dans l'Exemple 14.11 que $E(X) = \frac{7}{2}$ et dans l'Exemple 14.12 que $m_2(X) = E(X^2) = \frac{91}{6}$. Ainsi :

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Proposition 14.4 Soit X une variable aléatoire finie et soient a et b dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

En particulier,

$$V(X + b) = V(X).$$

Attention ! Contrairement à l'espérance, la variance n'est pas linéaire.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
V(aX+b) &= E\left((aX+b-E(aX+b))^2\right) \\
&= E\left((aX+b-aE(X)-b)^2\right) \quad \text{par linéarité de l'espérance,} \\
&= a^2 E\left((X-E(X))^2\right) \\
&= a^2 V(X)
\end{aligned}$$

□

Exemple 14.16 On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit $Y = 2X+3$. Calculer la variance de X puis celle de Y.

Il s'agit de la même expérience que dans les Exemples 14.11 et 14.12.
On a calculé l'espérance $E(X) = \frac{7}{2}$ et le moment d'ordre 2: $E(X^2) = \frac{91}{6}$.
Dans l'Exemple 14.15, on a calculé la variance $V(X) = \frac{35}{12}$.
Pour calculer la variance de Y, comme on connaît celle de X, il suffit d'utiliser la Proposition 14.4. On a

$$V(Y) = V(2X+3) = 4V(X) = \frac{35}{4}.$$

Définition 14.8 Soit X une variable aléatoire finie, on appelle **écart-type** de X, et on note $\sigma(X)$ le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 14.17 Reprenons la variable aléatoire X de l'Exemple 14.16. Son écart-type vaut donc

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{3}}.$$

Définition 14.9 Soit X une variable aléatoire.

- On dit que X est **centrée** lorsque X admet une espérance et que $E(X) = 0$.
- On dit que X est **réduite** lorsque X admet une variance et que $V(X) = 1$.

Proposition 14.5 Soit X une variable aléatoire finie, alors, $Y = X - E(X)$ est une variable aléatoire centrée.

Démonstration. Par linéarité de l'espérance, on a $E(Y) = E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$. □

Proposition 14.6 Soit X une variable aléatoire finie alors la variable aléatoire

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)},$$

est une variable centrée réduite.
On l'appelle la **variable aléatoire centrée réduite associée à** X.

Démonstration. D'après la Proposition 14.4, on :

$$V(X^*) = V\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \left(\frac{1}{\sigma(X)}\right)^2 V(X - E(X)) = \frac{1}{\sigma(X)^2} V(X) = \frac{V(X)}{V(X)} = 1.$$

□

14.3 Lois finies

Nous avons vu la théorie à connaître sur les variables aléatoires en général. Cependant, de nombreuses variables aléatoires rencontrées dans les modèles mathématiques (et donc dans les exercices) suivent un petit nombre de lois, nommées en conséquence **lois usuelles**. Dans cette partie, nous allons étudier les lois usuelles finies qui sont au programme. Pour chaque loi usuelle, il faudra connaître par cœur :

1. la notation (et ses paramètres éventuels)
2. la loi de probabilité (et en particulier $X(\Omega)$)
3. l'espérance et la variance
4. le ou les cas typiques d'utilisation
5. la rédaction classique pour justifier son utilisation.

Notations : On utilisera le symbole $\hookrightarrow$ pour signifier qu'une variable aléatoire « suit » une loi usuelle.

14.3.1 Loi certaine

Définition 14.10 Une variable aléatoire X suit la **loi certaine** si elle ne prend qu'une seule valeur a. On a alors $X(\Omega) = \{a\}$ et $P(X = a) = 1$.

Proposition 14.7 Si X suit une loi certaine avec $X(\Omega) = \{a\}$ alors

$$E(X) = a \qquad \text{et} \qquad V(X) = 0.$$

Démonstration. X est une variable aléatoire finie donc admet automatiquement une espérance et une variance. On a :

$$E(X) = a \times 1 = a \qquad \text{et} \qquad V(X) = a^2 \times 1 - (a)^2 = 0.$$

□

Méthode 14.2 (Rédaction) On utilise très peu cette loi. Pour justifier son utilisation, on peut dire « X ne prend qu'une valeur donc suit une loi certaine ».

14.3.2 Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$

Définition 14.11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[\![1,n]\!]$ lorsque $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$,

$$P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$.

Exemple 14.18 Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.
   On a $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;6]\!])$ car $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;6]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{6}$.
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on note X le numéro obtenu.
   On a $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$ car $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

Proposition 14.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Démonstration. $X(\Omega)$ est fini, donc X admet une espérance et

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

D'après le Théorème de König-Huygens, on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Or

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right) \\
&= \frac{n+1}{2} \times \frac{n-1}{6} \\
&= \frac{n^2-1}{12}
\end{aligned}$$

□

On peut généraliser la définition de la loi uniforme au cas d'un intervalle $[\![a,b]\!]$ où $(a,b) \in \mathbb{Z}$.

Définition 14.12 Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[\![a;b]\!]$ lorsque $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et que :

$$\forall k \in [\![a;b]\!], \qquad P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a;b]\!])$.

Proposition 14.9 Soit $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a;b]\!])$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

Démonstration. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a;b]\!])$ alors

$$X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;b-a+1]\!])$$

et donc

$$E(X-a+1) = \frac{b-a+2}{2}.$$

Or $E(X-a+1) = E(X) - a + 1$ ainsi

$$E(X) = E(X-a+1) + a - 1 = \frac{b-a+2}{2} + a - 1 = \frac{b-a+2+2a-2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

On a également :

$$V(X-a+1) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

Or $V(X-a+1) = V(X)$, donc

$$V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

□

Méthode 14.3 (Modélisation et rédaction pour utiliser la loi uniforme)

Modélisation Soit une expériences aléatoire comportant n issues équiprobables numérotées de 1 à n. Alors la variable aléatoire finie égale au numéro de l'issue se réalisant suit une loi $\mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$.

Rédaction on écrira « comme les valeurs de X sont les entiers entre 1 et n, et que toutes ces valeurs sont équiprobables, alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$ ».

On comprend bien que le nom ou le numéros des issues n'a aucune importance ici. Ainsi, si il y en a $b-a+1$ et qu'on les numérote de a à b, on obtient une loi $\mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$.

14.3.3 Loi de Bernoulli

Définition 14.13 Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p \in]0;1[$ lorsque $X(\Omega) = \{0;1\}$ et :

$$P(X=0) = 1-p \qquad \text{et} \qquad P(X=1) = p.$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues: une que l'on qualifie de « succès » de probabilité p et l'autre que l'on qualifie « d'échec » de probabilité $1-p$. On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un « succès », la variable aléatoire prend la valeur $X=1$, et sinon $X=0$.

Exemple 14.19 On lance une pièce équilibré et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est « Pile » et 0 sinon. Alors, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Proposition 14.10 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Alors, X admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1-p).$$

Démonstration. $X(\Omega)$ est fini donc X admet automatiquement et un variance. On a :

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p.$$

On a pour la variance :

$$V(X) = (0-p)^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p = (1-p)(p^2 + p(1-p)) = (1-p)p(p+1-p) = p(1-p).$$

□

Définition 14.14 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable et A un événement de Ω. La variable aléatoire finie X telle que

$$\begin{cases} X(\omega) & = 1 \quad \text{si} \quad \omega \in A \\ X(\omega) & = 0 \quad \text{si} \quad \omega \notin A \end{cases} \tag{14.1}$$

est appelée la **variable indicatrice de l'événement A.** On la note $\mathbb{1}_A$.

Exemple 14.20 On lance un dé. Soit A l'événement « tirer un numéro pair ». La variable aléatoire X qui vaut 1 si on tire un numéro pair et 0 sinon est la variable indicatrice de l'événement A.

Remarque : La variable indicatrice $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.

Méthode 14.4 (Modélisation et rédaction pour utiliser la loi de Bernoulli)

Modélisation On utilise la loi de Bernoulli dès qu'on considère une épreuve ayant 2 issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1-p$. En effet, dans ce cas, la variable aléatoire valant 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Rédaction on écrira « on appelle succès l'événement ...de probabilité p. Alors X, la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès, 0 en cas d'échec, suit une loi de Bernoulli de paramètre $p =$

14.3.4 Loi binomiale

Définition 14.15 Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètres** $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ lorsque $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et que :

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note : $\quad X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Remarque : Remarquons que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geqslant 0$ puisque $p \in [0,1]$, de plus la formule du binôme de Newton donne:

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$$

Il s'agit donc bien de la loi d'une variable aléatoire.

On répète n épreuves identiques de Bernoulli indépendantes. La probabilité d'obtenir un « succès » lors de la réalisation d'une épreuve est p. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus une fois que les n épreuves ont été réalisées suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple 14.21 On lance 10 fois de suite un dé non truqué, et on note X le nombre de numéros obtenus inférieurs ou égaux à 2. Alors, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$.

Remarque : La loi de Bernoulli est le cas particulier de la loi binomiale avec $n = 1$.

Proposition 14.11 Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$. Alors l'espérance et la variance de X sont données par :

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^{i+1}(1-p)^{n-1-i} \quad \text{en posant } i = k-1 \\
&= np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^{i}(1-p)^{n-1-i} \\
&= np(p+1-p)^{n-1} \quad \text{par la formule du binôme de Newton} \\
&= np
\end{aligned}$$

La démonstration de $V(X) = np(1-p)$ repose sur les mêmes idées mais est plus longue et plus technique. Vous verrons par la suite une preuve plus simple reposant sur l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires. □

Méthode 14.5 (Modélisation et rédaction pour utiliser la loi binomiale)

Modélisation Soit une expériences aléatoire se déroulant en n épreuves indépendantes. Chaque épreuve a deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $1-p$. La variable aléatoire X comptant le nombre de succès au cours de n épreuves de Bernoulli suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Rédaction on écrira « Dans une expérience à deux issues, on appelle succès l'événement ...de probabilité p. On répète n fois cette expérience de manière identique et indépendante. Alors si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$».

Tableau récapitulatif des lois discrètes usuelles

Loi	Valeurs prises	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$	$\llbracket 1;n \rrbracket$	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$	$\{0;1\}$	$P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$\llbracket 0;n \rrbracket$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$