

13. Dérivabilité

13.1	Dérivée en un point	1
	13.1.1 Nombre dérivé	
	13.1.2 Nombre dérivé à droite et à gauche	
	13.1.3 Dérivabilité et continuité	
	13.1.4 Taux d'accroissement et calculs de limite	
13.2	Dérivabilité sur un intervalle	8
	13.2.1 Fonction dérivée	
	13.2.2 Dérivée des fonctions usuelles	
	13.2.3 Opérations sur les dérivées	
	13.2.4 Fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle	
13.3	Applications de la dérivation	16
	13.3.1 Extrema locaux	
	13.3.2 Théorème de Rolle	
	13.3.3 Accroissements finis	
	13.3.4 Etude de la dérivée	

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.

Charles Hermite

Dans ce chapitre, est revue la définition d'un nombre dérivé et d'une fonction dérivée. Les formules de dérivation du lycée sont rappelées ainsi que la formule générale permettant de calculer la dérivée d'une fonction composée. Puis, nous étudierons des théorèmes fondamentaux en analyse directement liés à la notion de dérivation.

13.1 Dérivée en un point

13.1.1 Nombre dérivé

Définition

Définition 13.1 Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. La fonction f est dite **dérivable en x_0** si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 . Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Exemple 13.1 • La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

• Plus généralement, la fonction f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 2x_0$.

• La fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, et $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.



Remarque : En posant $h = x - x_0$, et sous réserve d'existence, on a également :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

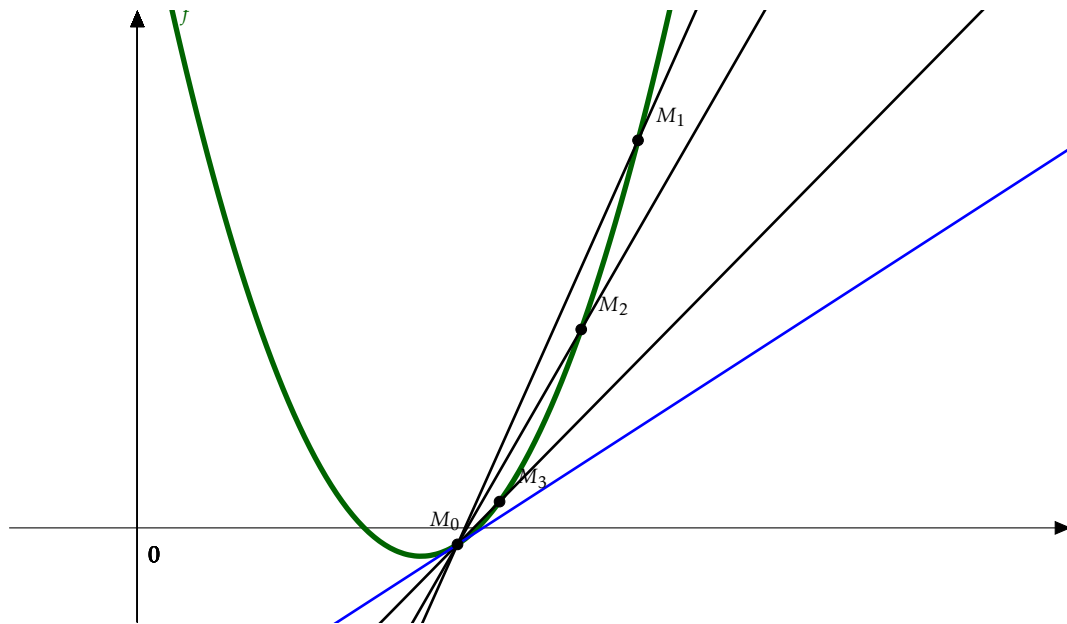


Remarque : En pratique, on utilise la définition avec le taux d'accroissement seulement pour montrer la dérivabilité aux "points à problèmes". En dehors de ces points, on justifie la dérivabilité à l'aide des propriétés du paragraphe 2.

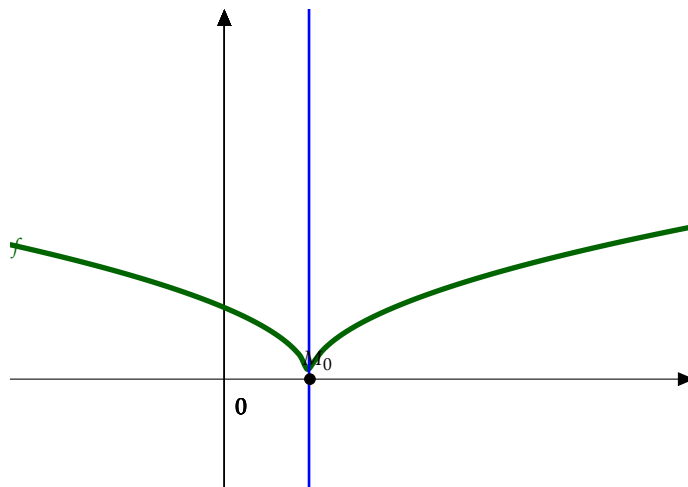
Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et soit $x_0 \in I$. Notons M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, et M le point de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in I$. Le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ correspond au coefficient directeur de la droite (MM_0) . Ainsi :

- Si f est dérivable en x_0 , alors ce coefficient directeur tend vers $f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 . Par ailleurs, la droite (M_0M) tend vers une position limite qui est la tangente à la courbe représentative de f au point x_0 . Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est alors le coefficient directeur de la tangente à la courbe f au point M_0 .



- Si la limite du taux d'accroissement est infinie, alors la courbe représentative de f possède en x_0 une tangente verticale d'équation $x = x_0$.



On résume cela dans la proposition suivante :

Proposition 13.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

- Si f est dérivable en x_0 , alors $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f au point d'abscisse x_0 . L'équation de cette tangente est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe \mathcal{C}_f admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0 .

Exemple 13.2 • Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

• Soit la fonction g définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = \sqrt{x}$.

13.1.2 Nombre dérivé à droite et à gauche

Définition 13.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. La fonction f est dite **dérivable à droite** en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^+ . Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé à droite** de f en x_0 , et est notée $f'_d(x_0)$:

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

De même, f est dite **dérivable à gauche** en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^- . Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé à gauche** de f en x_0 , et est notée $f'_g(x_0)$:

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Proposition 13.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. Alors, la fonction f est dérivable en x_0 , si et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en x_0 ET $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$. Dans ce cas, on a $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

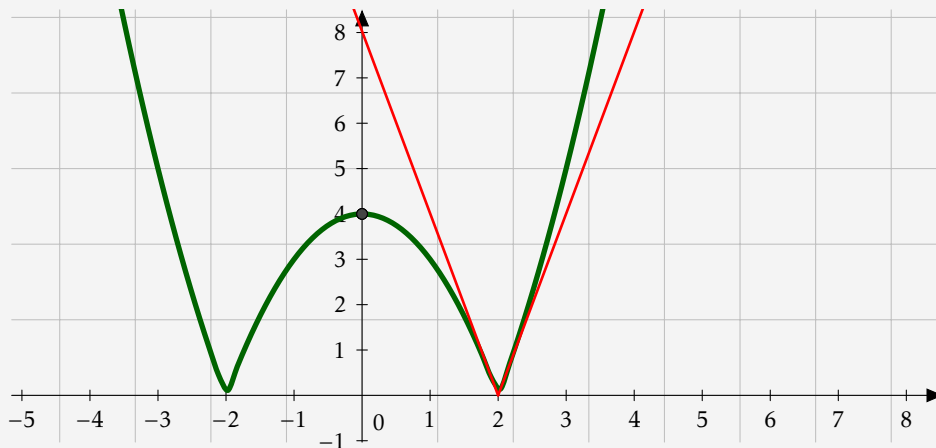
Exemple 13.3 • La fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \sqrt{x}$ est continue à droite en 0 mais n'est pas dérivable à droite en 0.

• La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$ admet une dérivée à gauche et à droite en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

Proposition 13.3 Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. Alors:

- Si f est dérivable à droite en x_0 (resp. à gauche en x_0), alors f admet une demi-tangente en x_0 de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$), alors f n'est pas dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 , et la courbe \mathcal{C}_f admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0 .

Exemple 13.4 La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x^2 - 4|$ admet deux demi-tangentes en 2 et -2.



Exercice 13.1 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0.

13.1.3 Dérivabilité et continuité

Proposition 13.4 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Démonstration.

□



Attention ! Une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point. Par exemple, la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$ est continue en 0, et pourtant elle n'est pas dérivable en 0. En effet,

$$\frac{|x| - 0}{x - 0} = \text{sign}(x) = \pm 1.$$

13.1.4 Taux d'accroissement et calculs de limite

Le taux d'accroissement peut aussi parfois servir pour lever des formes indéterminées dans des calculs de limites.

Exemple 13.5 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

13.2 Dérivabilité sur un intervalle

13.2.1 Fonction dérivée

Définition 13.3 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I . Si f est dérivable en tout x de I , on dit que f est dérivable sur I . De plus, la fonction $f' : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$ est appelée la fonction dérivée de la fonction f .

Exemple 13.6 1. La fonction carré est dérivable sur

2. La fonction racine est dérivable sur



Remarque : On étend cette définition sur un intervalle fermé borné en disant que f est dérivable sur $I = [a; b]$ lorsque :

- f est dérivable sur $]a; b[$;
- f est dérivable à droite en a ;
- f est dérivable à gauche en b ;

De même, on peut étendre cette définition pour un intervalle semi-ouvert $I =]a; b]$ ou $I = [a; b[$.

13.2.2 Dérivée des fonctions usuelles

Théorème 13.1 On dispose des dérivées usuelles suivantes :

\mathcal{D}_f	$f(x)$	Dérivable sur	$f'(x)$
\mathbb{R}	$x^n, n \in \mathbb{N}$	\mathbb{R}	nx^{n-1}
\mathbb{R}^*	$x^p, p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	\mathbb{R}^*	px^{p-1}
\mathbb{R}_+^*	$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$
\mathbb{R}_+	\sqrt{x}	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
\mathbb{R}	e^x	\mathbb{R}	e^x
\mathbb{R}_+^*	$\ln(x)$	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}	$\cos x$	\mathbb{R}	$-\sin x$
\mathbb{R}	$\sin x$	\mathbb{R}	$\cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
\mathbb{R}	$\arctan x$	\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$

Exemple 13.7 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1. \quad f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x^4} . \quad 2. \quad f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt[3]{x} . \quad 3. \quad f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} .$$

13.2.3 Opérations sur les dérivées

Proposition 13.5 (Linéarité) Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit λ dans \mathbb{R} . Alors $\lambda u + v$ est dérivable sur I et :

$$(\lambda u + v)' = \lambda u' + v'.$$

Démonstration.

□

Proposition 13.6 (Dérivation d'un produit et d'un quotient) Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Alors:

- uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- si v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.
- si v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exercice type 13.1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x-2}{x^2-10x+21}$.

1. Donner le domaine de définition \mathcal{D}_f de la fonction f .
2. Montrer que f est dérivable sur \mathcal{D}_f .
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

Corollaire 13.1 En particulier, on déduit de la proposition précédente que :

- Toute fonction polynôme est dérivable sur \mathbb{R} .
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k. \text{ Alors } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}.$$

- Toute fraction rationnelle (quotient de polynômes) est dérivable sur son ensemble de définition.

Dérivation d'une fonction composée

Théorème 13.2 Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , et v une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$ (pour pouvoir composer les fonctions). Alors, la fonction composée $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)).$$

Exemple 13.8 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , on obtient par composition (en précisant les conditions de validité) les formules suivantes :

Fonction du type	Dérivée
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$

Exemple 13.9 • Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x - 1)^3$.

• Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Méthode 13.1 (Pour montrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle I)

- S'il n'y a pas de "point à problème", on justifie la dérivabilité en utilisant les opérations sur les fonctions dérivables.
- S'il y a un "point à problème":
 - ★ on justifie la dérivabilité en dehors du point à problème à l'aide des opérations usuelles.
 - ★ on justifie la dérivabilité au point à problème avec la définition, en calculant la limite du taux d'accroissement.

Exercice type 13.2 Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 \ln(x) \text{ si } x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Dérivation d'une fonction réciproque

Théorème 13.3 Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective et soit $f^{-1} : J \rightarrow I$ sa bijection réciproque.

- Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. On suppose que f est dérivable en x_0 .
 - ★ Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

- ★ Si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et sa courbe représentative possède une tangente verticale en y_0 .
- Si f est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$.

Exemple 13.10 Utiliser ce résultat pour retrouver la dérivabilité du logarithme népérien en utilisant celle de l'exponentielle.

Exemple 13.11 Utiliser ce résultat pour retrouver la dérivabilité de la fonction arctan en utilisant celle de la fonction tan.

13.2.4 Fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle

Définition 13.4 Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et on note $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ (ou plus simplement $\mathcal{C}^1(I)$), si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I .

Exemple 13.12 • Les fonctions polynômes sont de classes \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

- La fonction \exp est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- Les fonctions \ln et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Les fonctions trigonométriques sont de classe \mathcal{C}^1 sur leur intervalle de définition.

Exercice 13.2 Reprenons la fonction de l'Exercice-type 13.2. On a montré que la fonction f était dérivable sur $[0; +\infty[$ et que sa dérivée f' était définie sur $[0; +\infty[$ par $f'(x) = x(2\ln(x) + 1)$ pour $x > 0$ et $f'(0) = 0$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[, \mathbb{R})$.

Exercice 13.3 Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ,} \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable sur \mathbb{R} , mais n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Théorème 13.4 (Prolongement de la dérivée) Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $I \setminus \{a\}$, continue en a , si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell$ alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f'(a) = \ell$.

Exemple 13.13 On définit la fonction f sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \neq 0 \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Proposition 13.7 (Espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^1) Soit I un intervalle de \mathbb{R} , l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I , noté $\mathcal{C}^1(I)$, est un espace vectoriel.

Démonstration.

□

Remarque : Pour démontrer le caractère C^1 d'une fonction ne possédant pas de "point à problème", on utilise le caractère C^1 des fonctions usuelles ainsi que les opérations sur les fonctions dérivables et continues.



13.3 Applications de la dérivation

13.3.1 Extrema locaux

Définition 13.5 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$ tel que f est dérivable en x_0 alors x_0 est appelé **point critique de f** si $f'(x_0) = 0$.

Théorème 13.5 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et si f présente un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.



Attention ! La réciproque de ce théorème est fautive i.e. un point critique n'est pas forcément un extremum. En effet, la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local. On dispose cependant du théorème suivant :

Démonstration.

□

Méthode 13.2 (Pour déterminer les extrema de f)

- on résout l'équation $f'(x) = 0$;
- parmi les solutions de cette équation, on regarde et on garde celles pour lesquelles f' s'annule en changeant de signe;
- on a donc obtenu les extrema locaux de f .

Exercice 13.4 Trouver les extrema locaux de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^4 + x$.

13.3.2 Théorème de Rolle

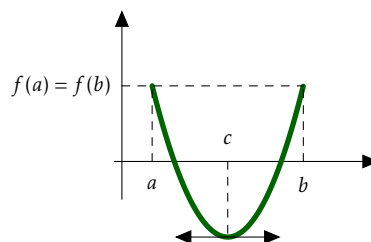
Théorème 13.6 Soit $a < b$, si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et qui vérifie $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration.

□

Remarque : Le réel c n'est pas forcément unique.

Interprétation géométrique : La courbe de f admet une tangente horizontale en **au moins** un point $c \in]a, b[$.



Exercice 13.5 Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

13.3.3 Accroissements finis

Théorème 13.7 (Égalité des accroissements finis) Soit $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration.

□

Exercice 13.6 Montrer que $\forall x > 0 \quad \exists c \in]0, x[$

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1 + c^2}.$$

Théorème 13.8 (Inégalités des accroissements finis, version 1) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que:

$$\forall x \in]a; b[\quad m \leq f'(x) \leq M$$

Alors:

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Démonstration.

□

Exemple 13.14 En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction \exp , on peut montrer que

$$\forall x \in [0; 1], \quad 0 \leq e^x - 1 \leq xe.$$

Exercice type 13.3 Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

Théorème 13.9 (Inégalités des accroissements finis, version 2) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq k$$

Alors:

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2 \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$



Remarque :

- dans cette deuxième version du théorème, les réels x_1 et x_2 sont rangés dans un ordre quelconque, alors que dans la première version du théorème, les réels a et b vérifient $a < b$.
- rappelons l'équivalence: $\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq k \iff \forall x \in I \quad -k \leq f'(x) \leq k$.

Exercice 13.7 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

La deuxième version de l'inégalité des accroissements finis permet parfois d'étudier la convergence de suites définies par récurrence:

Exercice type 13.4 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2).$$

1. Étudier les variations de f et montrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
2. Montrer que pour tout entier n dans \mathbb{N} , $u_n \in [1, 2]$.
3. Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ , alors $\ell = \sqrt{2}$.
4. Montrer que pour tout $t \in [1, 2]$: $|f'(t)| \leq \frac{1}{2}$
5. Montrer que pour tout entier n dans \mathbb{N} : $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$, puis que :
 $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
6. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

Corrigé :

1.

2.

3.

4.

5.

6.


13.3.4 Etude de la dérivée

Proposition 13.8 (Variations de fonctions dérivables) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

Démonstration.

□

Attention ! Le résultat du troisième point est faux si I n'est pas un intervalle. Ainsi, la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = -1$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$, vérifie $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, mais f n'est pas constante. 

Corollaire 13.2 Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I , et soit $a \in I$. On suppose que $f(a) = g(a)$. Alors,

$$f = g \text{ sur } I \iff \forall x \in I, f'(x) = g'(x).$$

Exercice 13.8 Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$.

1. Justifier que g est dérivable sur \mathbb{R} puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0$.
2. Calculer $g(0)$. Que peut-on en déduire pour g ? Que peut-on en déduire pour f ?



Remarque : On peut adapter les résultats de la Proposition 13.8 pour montrer la stricte monotonie : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} ,

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I .
- Plus généralement, si pour tout $x \in J$, $f'(x) > 0$, où J est l'intervalle I auquel on a retiré un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I .

Exemple 13.15 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

Méthode 13.3 (Étudier les variations d'une fonction)

- on justifie que la fonction est bien dérivable ;
- on calcule la dérivée de la fonction ;
- on détermine le signe de la dérivée avant de conclure ;

Exercice 13.9 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 28$. Étudier les variations de la fonction f .

