13. Dérivabilité

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.

Charles Hermite

Dans ce chapitre, est revue la définition d'un nombre dérivé et d'une fonction dérivée. Les formules de dérivation du lycée sont rappelées ainsi que la formule générale permettant de calculer la dérivée d'une fonction composée. Puis, nous étudierons des théorèmes fondamentaux en analyse directement liés à la notion de dérivation.

13.1 Dérivée en un point

13.1.1 Nombre dérivé

Définition

Définition 13.1 Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. La fonction f est dite **dérivable en** x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Exemple 13.1
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

  En effet, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$. On a donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$. Cela signifie que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 2$.
- Plus généralement, la fonction f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 2x_0$.

  En effet, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = x+x_0$. On a donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 2x_0$. Cela signifie que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = 2x_0$.
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, et $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$.

  En effet, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \dfrac{\frac{x_0-x}{xx_0}}{x-x_0} = -\dfrac{1}{xx_0}$. On a donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\dfrac{1}{x_0^2}$. Cela signifie que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$.

Remarque : En posant $h = x - x_0$, et sous réserve d'existence, on a également :

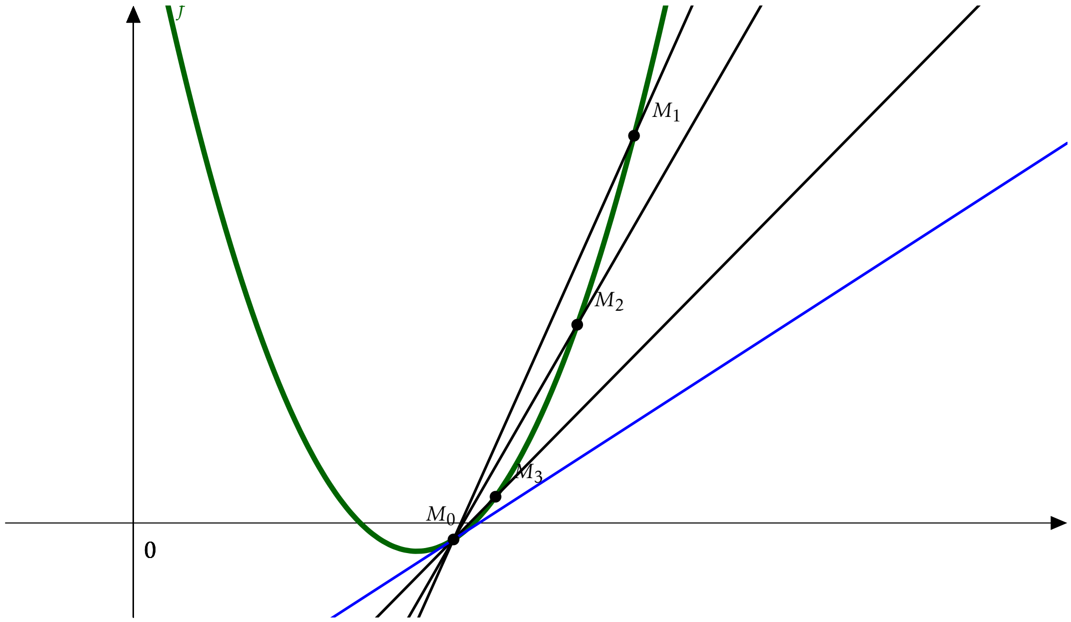
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Remarque : En pratique, on utilise la définition avec le taux d'accroissement seulement pour montrer la dérivabilité aux "points à problèmes". En dehors de ces points, on justifie la dérivabilité à l'aide des propriétés du paragraphe 2.

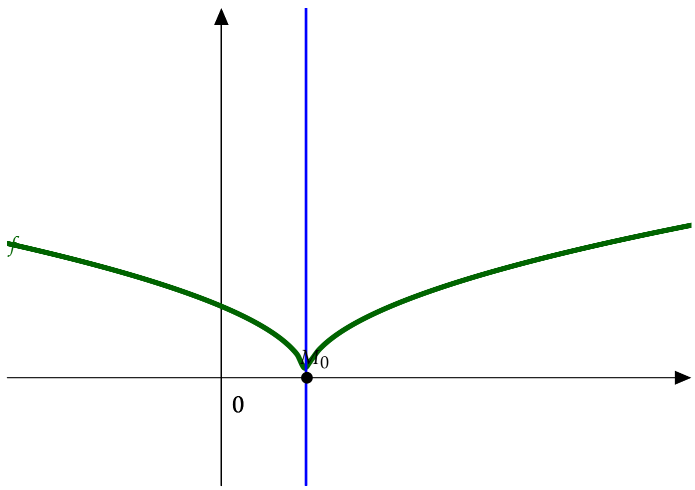
Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $x_0 \in I$. Notons M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, et M le point de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in I$. Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ correspond au coefficient directeur de la droite (MM_0). Ainsi :

- Si f est dérivable en x_0, alors ce coefficient directeur tend vers $f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0. Par ailleurs, la droite (M_0M) tend vers une position limite qui est la tangente à la courbe représentative de f au point x_0. Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est alors le coefficient directeur de la tangente à la courbe f au point M_0.



- Si la limite du taux d'accroissement est infinie, alors la courbe représentative de f possède en x_0 une tangente verticale d'équation $x = x_0$.



On résume cela dans la proposition suivante :

Proposition 13.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

- Si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse x_0. L'équation de cette tangente est :
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
- Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

Exemple 13.2

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

  Puisque la fonction f est dérivable en $x_0 = 1$ de dérivée $f'(1) = 2$, la courbe représentative de f admet au point M_0 de coordonnées $(1;1)$ une tangente, d'équation
  $$y = 2(x-1)+1 = 2x-1\,.$$

- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

  La fonction g n'est pas dérivable en 0. En effet, étudions la limite de son taux d'accroissement en 0. On a $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = +\infty$. La fonction n'est donc pas dérivable en 0 et la courbe représentative de g admet une tangente verticale au point $(0;0)$.

13.1.2 Nombre dérivé à droite et à gauche

Définition 13.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. La fonction f est dite **dérivable à droite** en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^+. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé à droite** de f en x_0, et est notée $f'_d(x_0)$:

$$f'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

De même, f est dite **dérivable à gauche** en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^-. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé à gauche** de f en x_0, et est notée $f'_g(x_0)$:

$$f'_g(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Proposition 13.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. Alors, la fonction f est dérivable en x_0, si et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en x_0 ET $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$. Dans ce cas, on a $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 13.3

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est continue à droite en 0 mais n'est pas dérivable à droite en 0.
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ admet une dérivée à gauche et à droite en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

Etudions la dérivabilité de f en 0. Soit $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$$

Cette fonction n'étant pas définie en 0, pour calculer sa limite en 0, on doit d'abord calculer les limites à droite et à gauche de 0.
Pour $x < 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1.$$

Ainsi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1.$$

Ainsi la fonction f est dérivable à gauche de 0 et $f'_g(0) = -1$.
Pour $x > 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$

Ainsi

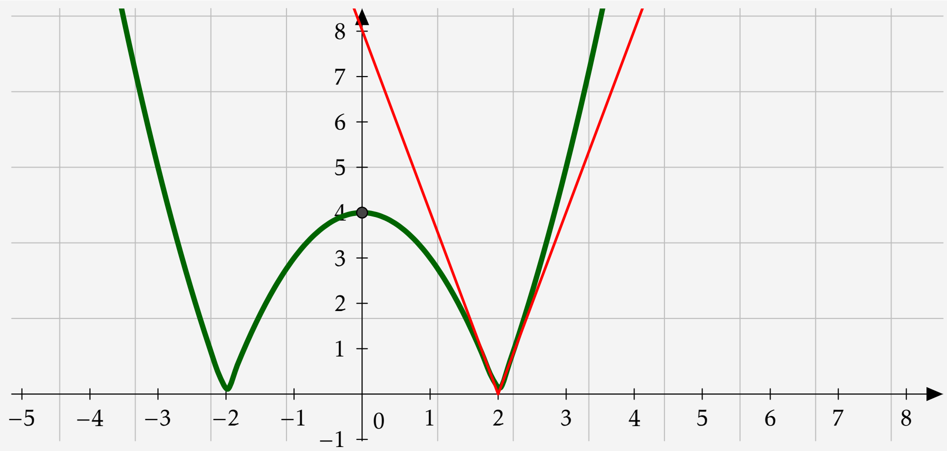
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1.$$

Ainsi la fonction f est dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = 1$.
Pour conclure, on a $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Proposition 13.3 Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. Alors:

- Si f est dérivable à droite en x_0 (resp. à gauche en x_0), alors f admet une demi-tangente en x_0 de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).
- Si $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ (resp. $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$), alors f n'est pas dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0, et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

Exemple 13.4 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 4|$ admet deux demi-tangentes en 2 et -2.



Exercice 13.1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}.$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0.

1. On a $\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$. Donc, f est continue en 0.
2. On a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Donc, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$. De même, il est clair que f est dérivable à gauche en 0, avec $f'_g(0) = 0$. Donc, f est dérivable en 0.

13.1.3 Dérivabilité et continuité

Proposition 13.4 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Démonstration. On cherche à établir un lien entre f et son taux d'accroissement autour du point x_0. Cependant, le taux d'accroissement de f en x_0 n'est pas défini au point x_0. On introduit donc la fonction φ définie au voisinage de x_0 par :

$$\forall x \neq x_0, \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad \varphi(x_0) = f'(x_0)$$

Par définition de $f'(x_0), \varphi$ est continue au point x_0 (φ est le prolongement par continuité en x_0 du taux d'accroissement), et pour tout x dans un voisinage de x_0,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x).$$

Donc f est continue en x_0 par somme et produit de fonctions continues en x_0. □

Attention ! Une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue en 0, et pourtant elle n'est pas dérivable en 0. En effet,

$$\frac{|x| - 0}{x - 0} = sign(x) = \pm 1.$$

13.1.4 Taux d'accroissement et calculs de limite

Le taux d'accroissement peut aussi parfois servir pour lever des formes indéterminées dans des calculs de limites.

Exemple 13.5

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

   En effet, posons $f(x) = e^x$, on reconnaît alors le taux d'accroissement de f en 0. On a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Or la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 1$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = 1.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

   En effet, posons $f(x) = \ln(1+x)$, on reconnaît alors le taux d'accroissement de f en 0. On a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0}$. Or la fonction $x \to \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $f'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = 1.$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

   En effet, posons $f(x) = \sin x$, on reconnaît alors le taux d'accroissement de f en 0. On a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$. Or la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = \cos 0 = 1$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = f'(0) = 1.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

   En effet, posons $f(x) = \tan x$, on reconnaît alors le taux d'accroissement de f en 0. On a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\tan x - \tan 0}{x - 0}$. Or la fonction tangente est dérivable en 0 et

$f'(0) = \dfrac{1}{\cos^2 0} = 1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = f'(0) = 1$.

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

   En effet, posons $f(x) = \ln x$, on reconnaît alors le taux d'accroissement de f en 1. On a $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1}$. Or la fonction $\ln$ est dérivable en 1 et $f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.
   Ainsi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = f'(1) = 1$.

13.2 Dérivabilité sur un intervalle

13.2.1 Fonction dérivée

Définition 13.3 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Si f est dérivable en tout x de I, on dit que f est dérivable sur I. De plus, la fonction $f' : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$ est appelée la fonction dérivée de la fonction f.

Exemple 13.6

1. La fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Si on note $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$ alors $f' : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{cases}$
2. La fonction racine est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Si on note $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{cases}$ alors $g' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

Remarque : On étend cette définition sur un intervalle fermé borné en disant que f est dérivable sur $I = [a;b]$ lorsque :

- *f est dérivable sur $]a;b[$;*
- *f est dérivable à droite en a ;*
- *f est dérivable à gauche en b;*

De même, on peut étendre cette définition pour un intervalle semi-ouvert $I =]a;b]$ ou $I = [a;b[$.

13.2.2 Dérivée des fonctions usuelles

Théorème 13.1 On dispose des dérivées usuelles suivantes :

$\mathcal{D}_f$	$f(x)$	Dérivable sur	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$x^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	$x^p, \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	px^{p-1}
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\mathbb{R}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Exemple 13.7 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x^4} \end{array}$.
2. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array}$.
3. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$.

1. On a $f(x) = x^p$ avec $p = -4$, ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -4x^{-4-1} = \dfrac{-4}{x^5}$.
2. On a $f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha = \dfrac{1}{3}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$.
3. On a $f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$.

13.2.3 Opérations sur les dérivées

Proposition 13.5 **(Linéarité)** Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit λ dans $\mathbb{R}$. Alors $\lambda u + v$ est dérivable sur I et :

$$(\lambda u + v)' = \lambda u' + v'.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$

$$\frac{(\alpha u + v)(x) - (\alpha u + v)(x_0)}{x - x_0} = \frac{(\alpha u(x) + v(x)) - (\alpha u(x_0) + v(x_0))}{x - x_0} = \alpha \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

Or u et v sont dérivables en x_0 (car dérivables sur I), donc les deux termes de droite admettent une limite finie en x_0. Donc $\alpha u+v$ est dérivable en x_0 et on obtient par passage à la limite :

$$(\alpha u+v)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(\alpha u+v)(x)-(\alpha u+v)(x_0)}{x-x_0}=\alpha u'(x_0)+v'(x_0).$$

Ce raisonnement étant vrai pour un x_0 quelconque appartenant à I. On en conclut que $\lambda u+v$ est dérivable sur I et que $(\lambda u+v)'=\lambda u'+v'$. □

Proposition 13.6 (Dérivation d'un produit et d'un quotient) Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors:

- uv est dérivable sur I et $(uv)'=u'v+uv'$.
- si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$.
- si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Exercice type 13.1 Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x-2}{x^2-10x+21}$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathcal{D}_f$.

Correction

1. La fonction f est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $x^2-10x+21\neq 0$. On cherche donc les x pour lesquels $x^2-10x+21=0$. Après calcul du discriminant, on obtient deux racines distinctes qui sont 3 et 7. Ainsi, f est définie sur $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{3;7\}$.

2. Posons $u(x)=x-2$ et $v(x)=x^2-10x+21$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, v ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$. Ainsi, d'après le théorème ci-dessus, f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

3. On a $u'(x)=1$ et $v'(x)=2x-10$, pour tout $x\in\mathcal{D}_f$. Donc,

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathcal{D}_f,\qquad f'(x)&=\frac{1(x^2-10x+21)-(x-2)(2x-10)}{(x^2-10x+21)^2}\\&=\frac{x^2-10x+21-2x^2+10x+4x-20}{(x^2-10x+21)^2}\\&=\frac{-x^2+4x+1}{(x^2-10x+21)^2}.\end{aligned}$$

Corollaire 13.1 En particulier, on déduit de la proposition précédente que :

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$
- Toute fraction rationnelle (quotient de polynômes) est dérivable sur son ensemble de définition.

Dérivation d'une fonction composée

Théorème 13.2 Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et v une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$ (pour pouvoir composer les fonctions). Alors, la fonction composée $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)).$$

Exemple 13.8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(x^2+1\right).$$

Soient u et v les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ par $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = \ln(x)$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que polynôme) et à valeurs dans $[1;+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, $f = v \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = u'(x) \times u'(v(x)) = 2x \times \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, on obtient par composition (en précisant les conditions de validité) les formules suivantes :

Fonction du type	Dérivée
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$u^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$

Exemple 13.9

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)^3$.

  Alors, $f = u^3$ avec u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x-1$. Comme u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que polynôme), d'après le corollaire ci-dessous, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3 \times 2 \times (2x-1)^{3-1} = 6(2x-1)^2$.

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2+1}$.

  Alors, $g = \sqrt{u}$ avec u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2+1$. Comme u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que polynôme), d'après le corollaire ci-dessous, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Méthode 13.1 (Pour montrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle I)

- S'il n'y a pas de "point à problème", on justifie la dérivabilité en utilisant les opérations sur les fonctions dérivables.
- S'il y a un "point à problème":
  - ⋆ on justifie la dérivabilité en dehors du point à problème à l'aide des opérations usuelles.
  - ⋆ on justifie la dérivabilité au point à problème avec la définition, en calculant la limite du taux d'accroissement.

Exercice type 13.2 Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2\ln(x) \text{ si } x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$. On calcule sa dérivée en utilisant la formule de dérivation d'un produit :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = x(2\ln(x)+1).$$

Pour étudier la dérivabilité en 0, on calcule le taux d'accroissement. Soit $x > 0$. On a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\ln(x)}{x} = x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Bref, f est dérivable sur $[0;+\infty[$ avec

$$f'(x) = x(2\ln(x)+1) \text{ si } x > 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 0.$$

Dérivation d'une fonction réciproque

Théorème 13.3 Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et soit $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque.

- Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. On suppose que f est dérivable en x_0.
  - ★ Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et on a
  $$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$
  - ★ Si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et sa courbe représentative possède une tangente verticale en y_0.
- Si f est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$.

Exemple 13.10 Utiliser ce résultat pour retrouver la dérivabilité du logarithme népérien en utilisant celle de l'exponentielle.

La fonction exponentielle est une fonction bijective strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque $\ln$. On sait que $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \neq 0$. Sa réciproque $\ln$ est donc dérivable sur l'ensemble de son ensemble de définition et.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

Exemple 13.11 Utiliser ce résultat pour retrouver la dérivabilité de la fonction $\arctan$ en utilisant celle de la fonction $\tan$.

La fonction tangente est une fonction bijective strictement croissante de $-\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$, de réciproque $\arctan$. On sait que $\tan$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$. Sa réciproque $\arctan$ est donc dérivable sur l'ensemble de son ensemble de définition et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

13.2.4 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle

Définition 13.4 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on note $f \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$ (ou plus simplement $\mathcal{C}^1(I)$), si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.

Exemple 13.12
- Les fonctions polynômes sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions ln et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonctions trigonométriques sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur intervalle de définition.

Exercice 13.2 Reprenons la fonction de l'Exercice-type 13.2. On a montré que la fonction f était dérivable sur $[0;+\infty[$ et que sa dérivée f' était définie sur $[0;+\infty[$ par $f'(x) = x(2\ln(x)+1)$ pour $x > 0$ et $f'(0) = 0$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1([0;+\infty[,\mathbb{R})$.

Il reste à montrer que f' est continue sur $[0;+\infty[$ pour obtenir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.
La fonction $x \mapsto x(2\ln(x)+1)$ est continue sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions continues. Il nous reste alors à étudier la continuité de f' en 0. On a :

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} x(2\ln(x)+1) = \lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x)+x$$

Or $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = f'(0).$$

La fonction f' est donc continue en 0. On peut donc conclure que

$$f \in \mathcal{C}^1([0;+\infty[,\mathbb{R}).$$

Exercice 13.3 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases} \end{array},$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Etudions la dérivabilité de la fonction f en 0. Pour cela, calculons le taux d'accroissement de f en 0, on a pour $x \neq 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or pour $x \neq 0$, $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$ et $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$. Ainsi par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
La fonction $x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En effet, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables. De plus, $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par produit $x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On a pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

En résumé, on a :

$$\begin{array}{cccc} f' & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases} \end{array},$$

Montrons que f' n'est pas continue en 0.
Raisonnons par l'absurde et supposons que f' est continue en 0. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{2n\pi}$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, et comme f' est continue en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(u_n) = f'(0) = 0$. Or $f'(u_n) = \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1$. Absurde.
La fonction f' n'est pas continue en 0 et la fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 13.4 (Prolongement de la dérivée) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$, continue en a, si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell$ alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Exemple 13.13 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \neq 0 \quad f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. En effet, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi par composition, $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$.
De plus, la fonction f est continue en 0. En effet, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X = 0$ donc par composée de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$.
Il reste à étudier $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. On a pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} = 0$ par crois-

sance comparée. Ainsi d'après le théorème de prolongement de la dérivée, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $f'(0) = 0$.

Proposition 13.7 (Espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, noté $\mathcal{C}^1(I)$, est un espace vectoriel.

On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$:

- La fonction nulle est dérivable sur I, et sa dérivée est la fonction nulle, continue sur I, donc la fonction nulle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $\mathcal{C}^1(I)$ est non vide.
- Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^1(I)$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par les propositions précédente, $\lambda f + g$ est dérivable sur I, de dérivée $\lambda f' + g'$. Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^1, f'$ et g' sont continues sur I. Par combinaison linéaire de fonctions continues, $\lambda f' + g'$ est continue sur I. Donc $\lambda f + g \in \mathcal{C}^1(I)$.

Donc $\mathcal{C}^1(I)$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, c'est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. □

Remarque : Pour démontrer le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction ne possédant pas de "point à problème", on utilise le caractère $\mathcal{C}^1$ des fonctions usuelles ainsi que les opérations sur les fonctions dérivables et continues.

13.3 Applications de la dérivation

13.3.1 Extrema locaux

Définition 13.5 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$ tel que f est dérivable en x_0 alors x_0 est appelé **point critique de** f si $f'(x_0) = 0$.

Théorème 13.5 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et si f présente un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Attention ! La réciproque de ce théorème est fausse i.e. un point critique n'est pas forcément un extremum. En effet, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local. On dispose cependant du théorème suivant :

Démonstration. Supposons que f possède un maximum local en x_0. Il existe alors un réel $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ et $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], f(x) \leqslant f(x_0)$. Donc, pour tout $x \in]x_0, x_0 + \alpha]$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0.$$

Or f est dérivable en x_0 par hypothèse. On peut donc passer à la limite dans cette inégalité et on trouve $f'(x_0) \leqslant 0$.
De même, pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0[$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

ce qui donne $f'(x_0) \geqslant 0$. Donc $f'(x_0) = 0$. □

Méthode 13.2 **(Pour déterminer les extrema de f)**

- on résout l'équation $f'(x) = 0$;
- parmi les solutions de cette équation, on regarde et on garde celles pour lesquelles f' s'annule en changeant de signe;
- on a donc obtenu les extrema locaux de f.

Exercice 13.4 Trouver les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^4 + x$.

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 4x^3 + 1.$$

Cette dérivée s'annule si et seulement si $x^3 = -\frac{1}{4}$. Il y a une seule solution réelle, $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.
De plus, la dérivée est négative avant et positive après donc la fonction est décroissante avant $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, et croissante ensuite. On en conclut que la fonction admet un minimum local en $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.
Comme la dérivée ne s'annule pas ailleurs, et qu'il n'y a pas de borne ou de point où la fonction n'est pas dérivable, cela signifie que la fonction n'admet pas de maximum.

13.3.2 Théorème de Rolle

Théorème 13.6 Soit $a < b$, si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et qui vérifie $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

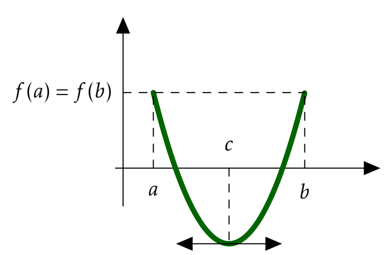
Démonstration. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ donc f est bornée et atteint ses bornes (cf Proposition 10.13 du Chapitre 10). On note m le minimum de f sur $[a, b]$ et M le maximum de f sur $[a, b]$.

- Si $m = M$ alors la fonction f est constante sur $[a, b]$, f' est donc nulle sur $]a, b[$ et on peut choisir n'importe quel $c \in]a, b[$ pour avoir $f'(c) = 0$.
- Si $m \neq M$, l'une de ces valeurs au moins n'est atteinte ni en a, ni en b (puisque $f(a) = f(b)$). Supposons qu'il s'agisse de M (le raisonnement est analogue avec m), il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Comme la fonction admet un maximum en c, sa dérivée s'annule d'après le Théorème 13.5 donc $f'(c) = 0$.

□

Remarque : Le réel c n'est pas forcément unique.

Interprétation géométrique : La courbe de f admet une tangente horizontale en **au moins** un point $c \in]a, b[$.



Exercice 13.5 Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a)).$$

Posons la fonction φ définie sur $[a,b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a)).$$

La fonction φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\varphi(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = \varphi(b)$. Ainsi d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$f'(c)(g(b)-g(a)) - g'(c)(f(b)-f(a)) = 0.$$

Remarque : on aurait pu poser une autre fonction φ.
Par exemple $\varphi(x) = (f(x)-f(a))(g(b)-g(a)) - (g(x)-g(a))(f(b)-f(a))$ fonctionnait également. On avait alors $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

13.3.3 Accroissements finis

Théorème 13.7 **(Égalité des accroissements finis)** Soit $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Démonstration. On se ramène aux hypothèses du théorème de Rolle. Pour tout $x \in [a,b]$, on pose :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$ comme somme de fonctions continues, et elle est dérivable sur $]a,b[$ comme somme de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in]a,b[$,,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

On remarque que $g(b) = g(a) = f(a)$.
Donc g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, et il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Et donc tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Exercice 13.6 Montrer que $\forall x > 0 \quad \exists c \in]0,x[$

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1+c^2}.$$

Soit $x > 0$, on définit sur $[0,x]$, la fonction φ par :

$$\varphi(x) = \arctan t.$$

La fonction φ est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$. Ainsi d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0,x[$ tel que :

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \varphi'(c).$$

Soit pour tout $x>0$, il existe $c \in]0,x[$, $\dfrac{\arctan(x)}{x} = \dfrac{1}{1+c^2}$.

Théorème 13.8 (Inégalités des accroissements finis, version 1) Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que:

$$\forall x \in]a;b[\qquad m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

Alors:

$$m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a).$$

Démonstration. Si $a=b$, le résultat est évident.
Sinon, l'égalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur, $[a,b]$ donne l'existence d'un $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Les bornes sur f' donnent par ailleurs $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ et donc

$$m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M.$$

Il suffit alors de tout multiplier par $(b-a) \geqslant 0$ pour obtenir le résultat annoncé. □

Exemple 13.14 En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\exp$, on peut montrer que

$$\forall x \in [0;1], \quad 0 \leqslant e^x - 1 \leqslant xe.$$

En effet, définissons sur $[0;1]$ la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$. La fonction f est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$. On a $\forall x \in]0;1[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$. On a, la fonction exponentielle étant croissante :

$$\forall x \in]0;1[, \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée sur $[0;x]$ avec $x \in [0;1]$, on a:

$$0(x-0) \leqslant f(x)-f(0) \leqslant \mathrm{e}(x-0)$$

soit pour tout $x \in [0;1]$:

$$0 \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant \mathrm{e}x.$$

Exercice type 13.3 Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit pour $x \in [n; n+1]$ la fonction f par $f(x) = \ln(x)$. Cette fonction est continue sur $[n; n+1]$ et dérivable sur $]n; n+1[$. On a pour $x \in]n; n+1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Ainsi $\forall x \in]n; n+1[$, on a

$$\frac{1}{n+1} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{n}.$$

On applique alors l'inégalité des accroissements finis et on obtient :

$$\frac{1}{n+1}(n+1-n) \leqslant f(n+1) - f(n) \leqslant \frac{1}{n}(n+1-n),$$

soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Théorème 13.9 (Inégalités des accroissements finis, version 2) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\forall x \in I \qquad |f'(x)| \leqslant k$$

Alors:

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2 \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|.$$

Remarque :

- *dans cette deuxième version du théorème, les réels x_1 et x_2 sont rangés dans un ordre quelconque, alors que dans la première version du théorème, les réels a et b vérifient $a < b$.*
- *rappelons l'équivalence:* $\forall x \in I \quad |f'(x)| \leqslant k \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in I \quad -k \leqslant f'(x) \leqslant k.$

Exercice 13.7 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sin(t)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \cos(t)$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leqslant 1$. Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on a, $\forall (0, x) \in \mathbb{R}^2$: $|f(x) - f(0)| \leqslant 1 \times |x - 0|$ soit $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

La deuxième version de l'inégalité des accroissements finis permet parfois d'étudier la convergence de suites définies par récurrence:

Exercice type 13.4 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2).$$

1. Étudier les variations de f et montrer que $f\Big([1,2]\Big) \subset [1,2]$.
2. Montrer que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.
3. Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell = \sqrt{2}$.
4. Montrer que pour tout $t \in [1,2]$: $|f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$
5. Montrer que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$: $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$, puis que : $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
6. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Corrigé :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme polynôme) et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 1 - \frac{x}{2}.$$
Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \leqslant 2$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 2$. Donc, f est croissante sur $]-\infty; 2[$ et décroissante sur $[2; +\infty[$.
Par ailleurs, $f(1) = \frac{5}{4}$ et $f(2) = \frac{3}{2}$. f étant croissante sur $[1;2]$, on en déduit $f([1;2]) = \left[\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right] \subset [1;2]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_n \in [1;2]$. »
Initialisation : $(n = 0)$ $\quad u_0 = 1 \in [1;2]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. D'après ce qui précède, on sait que $f([1;2]) \subset [1;2]$. Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in [1;2]$. Donc, $u_{n+1} = f(u_n) \in f([1;2]) \subset [1;2]$. Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1;2]$.

3. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ. De plus, la fonction f est continue (car dérivable), donc $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$. Par unicité de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que $\ell = f(\ell)$. Ainsi,
$$\ell = \ell + \frac{1}{4}(2 - \ell^2) \text{ soit } \ell^2 = 2 \text{ soit } \ell = \pm\sqrt{2}.$$
Or, $u_n \in [1;2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\ell \in [1;2]$ et donc $\ell = \sqrt{2}$.

4. On a vu que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 1 - \frac{t}{2}$. Et donc
$$\forall t \in [1;2], \quad |f'(t)| = 1 - \frac{t}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la deuxième version de l'inégalité des accroissements finis à f sur l'intervalle $[1;2]$ avec $a = u_n$ et $b = \sqrt{2}$. Cela donne, grâce à la question précédente :
$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| = |f(u_n) - f(\sqrt{2})| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|.$$
Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. »
Initialisation : $(n = 0)$ $\quad |u_0 - \sqrt{2}| = |1 - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}$. Donc, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après ce qui précède,
$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \sqrt{2}| &\leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}| \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$
Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

6. Comme $|\frac{1}{2}| < 1$, on a $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a
$$|u_n - \sqrt{2}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{d'où } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}.$$

13.3.4 Etude de la dérivée

Proposition 13.8 **(Variations de fonctions dérivables)** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$.

Démonstration. Le deuxième point s'obtient en appliquant le premier point à $-f$, et le troisième point s'obtient avec la réunion des deux premiers points.
Montrons le premier point et pour cela raisonnons par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que f est croissante sur I. Soit $x_0 \in I$, pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$, on a :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0.$$

Par passage à la limite (la limite existe et est finie par définition de $f'(x_0)$), on obtient $f'(x_0) \geqslant 0$. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, cela donne la positivité de f' sur I.
($\Leftarrow$) Supposons que $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$. Soit x et y dans I tels que $x \leqslant y$. La fonction f étant dérivable sur I, l'inégalité des accroissements finis (dont on utilise seulement la partie minoration) donne:

$$0(y-x) \leqslant f(y)-f(x).$$

D'où $f(x) \leqslant f(y)$. Comme c'est vrai pour tout couple (x, y) tel que $x \leqslant y$, la fonction f est croissante sur I. □

Attention ! Le résultat du troisième point est faux si I n'est pas un intervalle. Ainsi, la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=-1$ si $x<0$ et $f(x)=1$ si $x>0$, vérifie $f'(x)=0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, mais f n'est pas constante.

Corollaire 13.2 Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et soit $a \in I$. On suppose que $f(a)=g(a)$. Alors,

$$f=g \text{ sur } I \Longleftrightarrow \forall x \in I, f'(x)=g'(x).$$

Exercice 13.8 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle $f(0)=1$ et $f'(x)=f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)=0$.
2. Calculer $g(0)$. Que peut-on en déduire pour g? Que peut-on en déduire pour f?

1. La fonction $x \mapsto e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme f est également dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{f(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=0.$$

2. On a $g(0)=\dfrac{f(0)}{e^0}=1$. D'après le théorème ci-dessus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)=1.$$

Et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=e^x.$$

On vient donc de montrer que f est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(x)=f(x)$ et $f(0)=1$.

<u>Remarque</u> : On peut adapter les résultats de la Proposition 13.8 pour montrer la stricte monotonie : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,

- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.*
- *Plus généralement, si pour tout $x \in J$, $f'(x) > 0$, où J est l'intervalle I auquel on a retiré un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.*

Exemple 13.15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Alors, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$. Ainsi, $f'(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) > 0$. On peut en conclure que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode 13.3 (Étudier les variations d'une fonction)

- on justifie que la fonction est bien dérivable ;
- on calcule la dérivée de la fonction ;
- on détermine le signe de la dérivée avant de conclure ;

Exercice 13.9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 28$. Étudier les variations de la fonction f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$. Il nous maintenant étudier le signe de ce polynôme de degré 2. Son discriminant vaut donc $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 6 \times 36 = 36$. L'équation $6x^2 - 30x + 36 = 0$ admet donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{30 - \sqrt{36}}{2 \times 6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{30 + \sqrt{36}}{2 \times 6} = 3.$$

Par ailleurs, le coefficient dominant est strictement positif. On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	