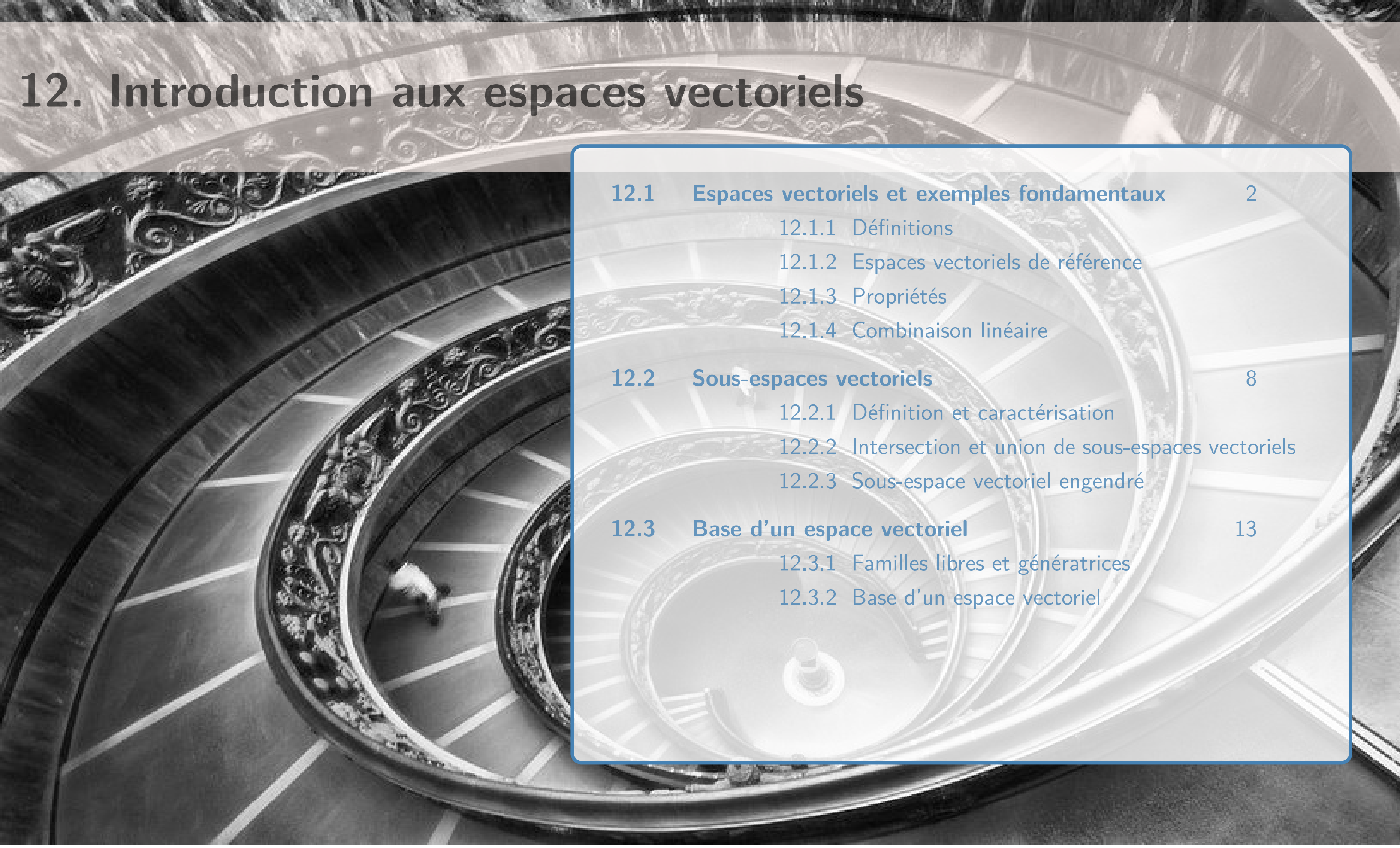

12. Introduction aux espaces vectoriels

Ne dis pas peu de choses en beaucoup de mots, mais dis beaucoup de choses en peu de mots.

Pythagore

Beaucoup de problèmes mathématiques, physiques ou économiques, vérifient la propriété suivante : « si u et v sont solutions alors $u+v$ est aussi solution, ainsi que λu où λ est un réel. »
De tels problèmes sont dits linéaires et ils sont souvent plus faciles à résoudre que les problèmes plus généraux dits non-linéaires. C'est pourquoi a été introduite la notion d'espace vectoriel qui permet de définir un cadre rigoureux à de tels phénomènes.
La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. L'intérêt de ce concept est de dégager les propriétés communes que partagent ces ensembles pourtant très différents. Le nom provient de l'ensemble le plus simple à visualiser, celui des vecteurs du plan.
Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour "l'agrandir", le "rétrécir" ou le "faire changer de sens" si ce réel est négatif). Dans tous les cas, le résultat de ces opérations sera encore un vecteur du plan.
De la même manière, prenons une fonction continue sur un intervalle I, on peut lui ajouter une autre fonction continue sur l'intervalle I ou bien la multiplier par un réel et cela restera une fonction continue sur l'intervalle I. Même chose avec les polynômes, les matrices, les suites ...
Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux fonctions, aux polynômes ...
On donnera dans ce chapitre une première approche concrète à ces notions qui seront approfondies au second semestre.

12.1 Espaces vectoriels et exemples fondamentaux

12.1.1 Définitions

Exemple 12.1 On considère $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in E$ avec $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer :

$x + y$

$\lambda \cdot x$

Définition 12.1 Soit E un ensemble non vide.
On dit que la loi + est une **loi de composition interne** sur E si: $\forall (x,y) \in E^2 \quad x + y \in E$.
On dit que la loi $\cdot$ est une **loi de composition externe** sur E si: $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot x \in E$.

Exemple 12.2 Si on se place sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous avons défini une loi de composition interne + et une loi de composition externe dans le Chapitre 6. En effet,

$$\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, M + N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot M = \lambda M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Dire qu'un ensemble E est un espace vectoriel, c'est mettre une loi externe et interne sur E tel que ces deux lois vérifient un certain nombre de propriétés.

Définition 12.2 On appelle **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$ ou plus simplement espace vectoriel, tout ensemble E non vide, muni d'une loi de composition interne (notée +) et d'une loi de composition externe (notée $\cdot$) et qui vérifie les propriétés suivantes:

- $\forall (x,y) \in E^2 \quad x + y = y + x$ (on dit que la loi + est **commutative**)
- $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad x + (y + z) = (x + y) + z$ (on dit que la loi + est **associative**)
- Il existe un élément de E noté 0_E tel que: $\forall x \in E \quad x + 0_E = 0_E + x = x$.
(0_E est appelé **élément neutre** de E pour la loi +, il est noté 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté)
- Pour tout élément x de E, il existe un élément y de E qui vérifie: $x + y = y + x = 0_E$.
(y est appelé **opposé** de x, il est noté $-x$)
- $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall (x,y) \in E^2 \quad \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in E \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in E \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$

Remarque :

- *Lorsque E est un espace vectoriel, les éléments de E sont appelés les* **vecteurs** *et les éléments de* $\mathbb{R}$ *les* **scalaires**.
- *L'élément neutre* 0_E *(souvent noté simplement 0 mais à ne pas confondre avec zéro) est appelé vecteur nul, il est présent dans tout espace vectoriel.*
- *Le symbole · qui se trouve entre un scalaire et un vecteur est la plupart du temps omis, comme c'est le cas par exemple lorsqu'on multiplie une matrice A par un réel 2 : on écrit* $2A$ *et non* $2 \cdot A$.

Propriété 12.1 Un espace vectoriel E possède un unique élément neutre et chaque vecteur de E possède un unique opposé.

Démonstration.

□

Exemple 12.3 Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$:

- Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit $x+y$ comme $(x_1+y_1, x_2+y_2) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une opération interne dans $\mathbb{R}^2$, qui vérifie les propriétés :

  Commutativité pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = y + x$$

Associativité pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(x+y)+z &= (x_1+y_1, x_2+y_2) + (z_1, z_2) = (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2) \\ &= (x_1, x_2) + (y_1+z_1, y_2+z_2) = x + (y+z)\end{aligned}$$

Elément neutre il existe un élément $e =$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$x + e = x = e + x.$$

Opposé pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, il existe $x' =$ tel que

$$x + x' = e = x' + x.$$

- Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\alpha \cdot x$ comme $(\alpha x_1, \alpha x_2) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une multiplication externe, qui vérifie les propriétés :

  1. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

  $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot x &= ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x\end{aligned}$$

  2. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

  $$\begin{aligned}\alpha \cdot (x+y) &= \alpha\,(x_1+y_1, x_2+y_2) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y\end{aligned}$$

  3. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

  $$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) = (\alpha\beta)\cdot x$$

  4. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 1 \cdot x = (x_1, x_2) = x$.

Donc $\left(\mathbb{R}^2, +, .\right)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

12.1.2 Espaces vectoriels de référence

Exemple 12.4 1. Les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ avec les lois $+$ et $\cdot$ définies dans le Chapitre 6 sont des espaces vectoriels.
Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **est un espace vectoriel**.

Par exemple, pour $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'élément neutre est et l'opposé

de $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ **est un espace vectoriel.**
   Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. On a :
   $$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$
   et
   $$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$
   Le neutre est
   L'opposé $(-x)$ de $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est
   En particulier, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sont des espaces vectoriels.

3. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'ensemble des matrices de taille n et p noté $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ **est un espace vectoriel.**
   L'addition de matrices et la multiplication par une constante ont été définis dans le Chapitre 6.
   L'élément neutre est
   L'opposé d'une matrice M est

4. L'ensemble des polynômes $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ **est un espace vectoriel**.
   L'addition de polynômes et la multiplication par une constante ont été définis dans le Chapitre 8.
   L'élément neutre est
   L'opposé d'un polynôme $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ est

5. L'ensemble des suites $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ **est un espace vectoriel.**
   L'élément neutre est
   L'opposé d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

6. L'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ (resp $(\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ **est un espace vectoriel**.
   L'élément neutre est
   L'opposé d'une fonction f est

Exemple 12.5 $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ **n'est pas** un espace vectoriel.

12.1.3 Propriétés

Proposition 12.1 **(Règles de calcul)** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in E$, on a :

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E \quad \text{et} \quad 0 \cdot x = 0_E$,
2. $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$,
3. $(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$.

Remarque :

- *Dans la suite* $(-\lambda \cdot x)$ *sera donc noté* $-\lambda \cdot x$ *ou encore* $-\lambda x$ *et* $x+(-y)$ *sera noté* $x-y$.
- *On en déduit que :* $\lambda x = \mu x \iff \lambda = \mu$ *ou* $x = 0_E$
  et $\lambda x = \lambda y \iff \lambda = 0$ *ou* $x = y$.

Remarque : Concernant les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$, *pour* $n = 2$, *il s'agit des vecteurs du plan et pour* $n = 3$ *les vecteurs de l'espace. La représentation graphique permettra de rendre les choses moins abstraites. Pour* $n \geqslant 4$, *il faut faire preuve d'un peu plus d'abstraction.*

12.1.4 Combinaison linéaire

Définition 12.3 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **famille** de vecteurs de E tout p-uplet $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ formé de p vecteurs de E.

Exemple 12.6 Soit $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \in E$ et $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$.

Définition 12.4 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E.
On dit qu'un vecteur x de E est **combinaison linéaire** des p vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$ s'il existe p réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tels que:

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

Les scalaires λ_i sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 12.7 Le vecteur $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi que de $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 12.8

1. Le vecteur $(5,6,9) \in \mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. En effet,

2. $P(x) = 7x^2 - 6x + 1$ est une combinaison linéaire de $e_1 = 1$, $e_2 = x$ et $e_3 = x^2$ car

Remarque : Le vecteur nul 0_E est combinaison linéaire de n'importe quels autres vecteurs.

Méthode 12.1 (Pour vérifier que x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$)

1. On peut en trouver une à l'oeil ou grâce à une astuce.
2. Sinon, on procède par identification pour trouver les λ_i et on résout le système correspondant.

Attention, il est possible de ne pas trouver de combinaison linéaire !

Exercice type 12.1 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille (e_1, e_2, e_3).

Exercice 12.1 Dans $\mathbb{R}[x]$, montrer que $P(x) = 2x^2 - x + 3$ n'est pas une combinaison linéaire de $P_1(x) = (x-1)^2$ et de $P_2(x) = x$.

12.2 Sous-espaces vectoriels

12.2.1 Définition et caractérisation

Définition 12.5 Soit E un espace vectoriel. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est un espace vectoriel et si $F \subset E$.

Exemple 12.9 $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Théorème 12.1 F est un sous-espace vectoriel de E (en abrégé: **s.e.v.**) si et seulement si F est une partie non vide de E telle que:

- $\forall (x,y) \in F^2 \quad x + y \in F$ (on dit que F est **stable pour l'addition**)
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in F \quad \lambda \cdot x \in F$ (on dit que F est **stable pour la multiplication par un scalaire**)

Remarque : Une des manières que vous utiliserez en pratique pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel sera de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Propriété 12.2 Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$ alors $0_E \in F$.

Démonstration.

□

Corollaire 12.1 F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $F \subset E$
- $F \neq \emptyset$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall (x,y) \in F^2 \quad \lambda x + y \in F$

Remarque : En général, pour montrer que F est non vide, on vérifie que 0_E appartient à F.

Exemple 12.10 Considérons le système linéaire :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Les solutions de (S) sont les triplets $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant les deux équations du système. La résolution d'un tel système est bien connue : elle se fait par la méthode du pivot de Gauss. Montrons que l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de ce système est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 12.2 L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 12.11 On note E l'espace vectoriel des suites réelles. Soit F l'ensemble des suites réelles convergentes, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice type 12.2 Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 12.2 Pourquoi les ensembles suivants ne sont-ils pas des espaces vectoriels?

1. $J = \emptyset$.
2. $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad | \quad x + y = 1 \right\}$.
3. $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad | \quad x \geqslant 0 \right\}$.

12.2.2 Intersection et union de sous-espaces vectoriels

Certaines opérations sur les ensembles se comportent bien avec les espaces vectoriels. C'est le cas de l'intersection.

Propriété 12.3 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

□

Exemple 12.12 Si on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ alors $F \cap G =$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Attention ! Le résultat précédent est faux pour l'union de deux s.e.v. En effet,

12.2.3 Sous-espace vectoriel engendré

Définition 12.6 Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E.
On appelle $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $e_1, \cdots e_p$.

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) = \left\{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p \quad | \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\right\}.$$

Exemple 12.13 Soit $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de E.

Théorème 12.2 Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E.
L'ensemble $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace vectoriel engendré** par $e_1, e_2, \dots, e_p$.

Démonstration.

□

Exemple 12.14 Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ engendré par la famille de vecteurs $(1, x, x^2, \dots, x^n)$.

Exemple 12.15 Montrons que $\mathrm{Vect}((1,2),(1,0)) = \mathbb{R}^2$.

Remarque : Ce théorème nous fournit une autre méthode pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel. Il faut alors identifier les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$ tels que F soit l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs. Alors $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et F est donc un sous-espace vectoriel.

Exercice type 12.3 Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad x+y+z=0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

12.3 Base d'un espace vectoriel

12.3.1 Familles libres et génératrices

Définition 12.7 Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $e_1, e_2, \dots, e_p$ des vecteurs de F.
On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une **famille génératrice** de F si

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p),$$

c'est-à-dire si tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$:

$$\forall x \in F \qquad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \qquad x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p.$$

Attention ! Rien n'assure l'unicité des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ c'est à dire l'unicité de l'écriture du vecteur x comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$: une condition supplémentaire est nécessaire. (voir section suivante)

Exemple 12.16 Reprenons le cas de l'Exercice type 12.3, on a $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et donc (e_1, e_2) est une famille génératrice de F.

Exemple 12.17 Déterminer une famille génératrice de

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+2c \\ a+c \\ b+c \\ -b-c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Proposition 12.3 Les opérations suivantes transforment une famille génératrice en une nouvelle famille génératrice:

- Échanger l'ordre des vecteurs de la famille,
- Enlever un vecteur nul,
- Enlever un vecteur qui apparaît deux fois,
- Enlever un vecteur qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille,
- Multiplier un vecteur par une constante non nulle,
- Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille.

Démonstration.

□

Exemple 12.18 Déterminer une famille génératrice de

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+2c \\ a+c \\ b+c \\ -b-c \end{pmatrix} \quad | \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

formée de 2 vecteurs.

Définition 12.8 Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $e_1, e_2, \dots, e_p$ des vecteurs de F.
On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une **famille libre** de F si aucun vecteur n'est combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille, c'est-à-dire si:

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \qquad \left(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E\right) \Longrightarrow \left(\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0\right)$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Exemple 12.19 La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est-elle une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

Exercice 12.3 Etudier la liberté des familles de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

1. $((1,0),(1,1))$

2. $((1,2),(3,6))$

Exercice 12.4 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$. La famille (f,g) est-elle libre dans l'espace vectoriel des fonctions réelles?

Proposition 12.4 Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Démonstration.

□

Proposition 12.5 Soit E un espace vectoriel. Une famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est liée si et seulement si au moins un des vecteurs de cette famille peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

<u>Remarque</u> : En particulier :

1. *Une famille dont l'un des vecteurs est nul est liée car* si $e_1 = 0_E$: $e_1 = 0e_2 + \dots + 0e_p$.
2. *Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée.*
3. *Une famille formée d'un seul vecteur non nul est libre.*
4. *Une famille (e_1, e_2) est liée si et seulement si e_1 et e_2 sont colinéaires.*

Démonstration.

□

Exemple 12.20

- La famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une famille

- La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une famille

12.3.2 Base d'un espace vectoriel

Définition

Définition 12.9 Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $e_1, e_2, \dots, e_p$ des vecteurs de F.
On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une **base** de F si et seulement si tout $x \in F$ se décompose de manière **unique** sous forme d'une combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \dots, e_p)$.
Autrement si :

$$\forall x \in F, \quad \exists!(x_1, x_2, \dots, x_p), \text{ tel que } x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots x_p e_p.$$

Ce p-uplet représente les coordonnées de x dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$

Remarque : On dit alors que F est de dimension p. RDV au second semestre.

Exemple 12.21 Dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, soient $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ alors la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 12.6 Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $e_1, e_2, \dots, e_p$ des vecteurs de F.
La famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une **base** de F si et seulement si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est à la fois une famille **libre** et une famille **génératrice** de F.

Exercice type 12.4 Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Déterminer les coordonnées de $X = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

-

-

Exercice 12.5 Soit E l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. En déterminer une base.

1.

2.

Bases canoniques des espaces vectoriels usuels

1. Pour $\mathbb{R}^n$:

2. Pour $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

3. Pour $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$:

4. Plus généralement, pour $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n,p \in \mathbb{N}^*$:

5. Pour $\mathbb{R}_n[x]$:

Exemple 12.22 Décomposons dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ le vecteur : $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Définition 12.10 Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Tout élément $x \in E$ s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{avec } x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in [\![1, n]\!].$$

La matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ est appelée **matrice colonne des coordonnées** du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque : Dans le cas où $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de E. Tout vecteur x est une matrice colonne qui coïncide avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 12.23 On se place sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$. Soit $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3) = (1, x, x^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. On introduit les polynômes :

$$Q : x \mapsto x \quad ; \quad R : x \mapsto x^2 + 1 \quad ; \quad S : x \mapsto x^2 - 1.$$

1. Déterminer la matrice colonne des coordonnées de chaque polynôme ci-dessus dans la base $\mathcal{B}$.

2. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (Q, R, S)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

3. Soit $P = 5x^2 + x - 1$. Déterminer les matrices colonne des coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base $\mathcal{B}'$.