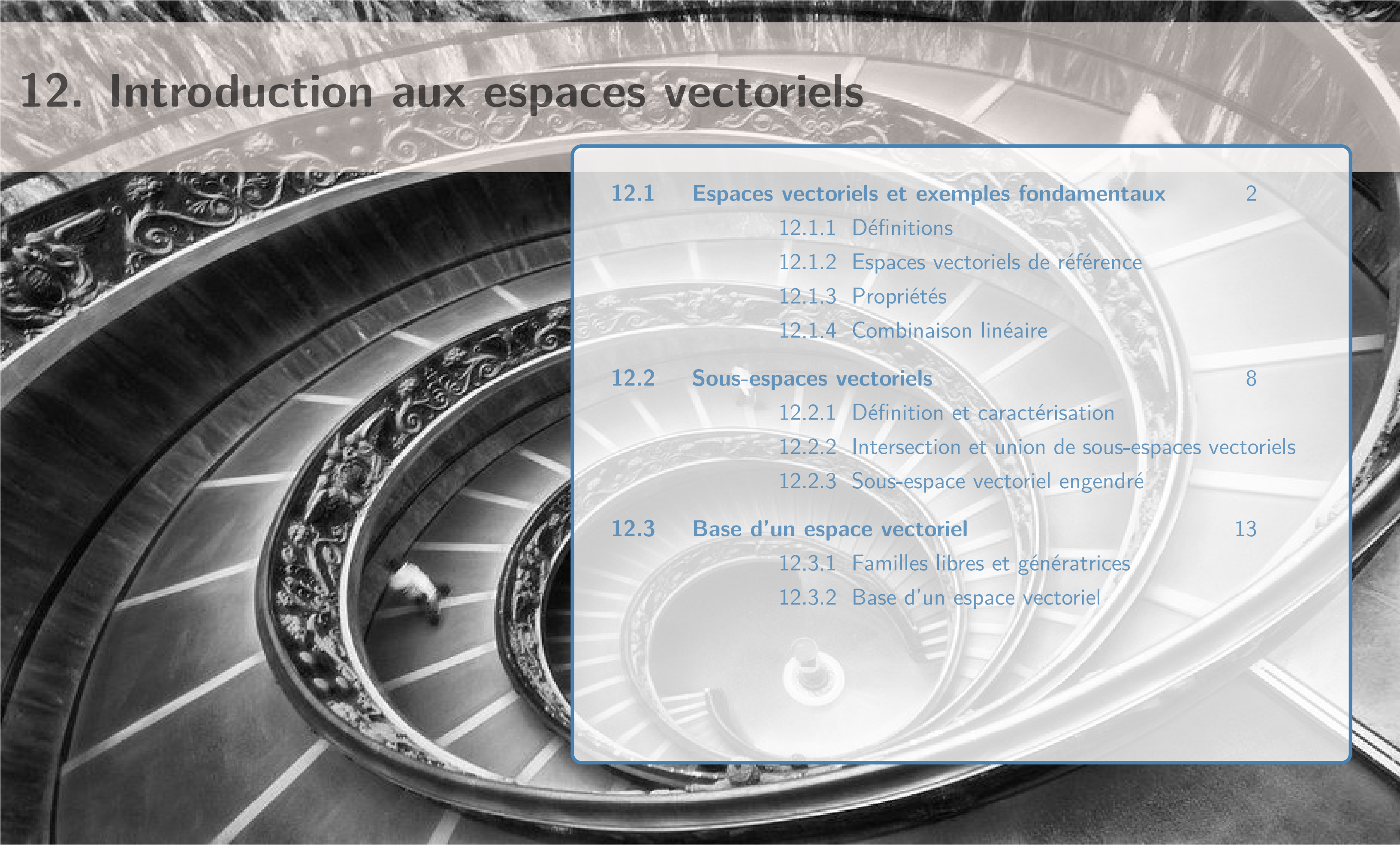

12. Introduction aux espaces vectoriels

Ne dis pas peu de choses en beaucoup de mots, mais dis beaucoup de choses en peu de mots.

Pythagore

Beaucoup de problèmes mathématiques, physiques ou économiques, vérifient la propriété suivante : « si u et v sont solutions alors $u+v$ est aussi solution, ainsi que λu où λ est un réel. »
De tels problèmes sont dits linéaires et ils sont souvent plus faciles à résoudre que les problèmes plus généraux dits non-linéaires. C'est pourquoi a été introduite la notion d'espace vectoriel qui permet de définir un cadre rigoureux à de tels phénomènes.
La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. L'intérêt de ce concept est de dégager les propriétés communes que partagent ces ensembles pourtant très différents. Le nom provient de l'ensemble le plus simple à visualiser, celui des vecteurs du plan.
Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour "l'agrandir", le "rétrécir" ou le "faire changer de sens" si ce réel est négatif). Dans tous les cas, le résultat de ces opérations sera encore un vecteur du plan.
De la même manière, prenons une fonction continue sur un intervalle I, on peut lui ajouter une autre fonction continue sur l'intervalle I ou bien la multiplier par un réel et cela restera une fonction continue sur l'intervalle I. Même chose avec les polynômes, les matrices, les suites ...
Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux fonctions, aux polynômes ...
On donnera dans ce chapitre une première approche concrète à ces notions qui seront approfondies au second semestre.

12.1 Espaces vectoriels et exemples fondamentaux

12.1.1 Définitions

Exemple 12.1 On considère $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in E$ avec $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer :

$x + y$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

$\lambda \cdot x$

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

On constate que $x + y \in E$. On dit que $+$ est une loi de composition interne sur E. On constate que $\lambda \cdot x \in E$. On dit que $\cdot$ est une loi de composition externe sur E.

Définition 12.1 Soit E un ensemble non vide.
On dit que la loi $+$ est une **loi de composition interne** sur E si: $\forall (x,y) \in E^2 \quad x + y \in E$.
On dit que la loi $\cdot$ est une **loi de composition externe** sur E si: $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot x \in E$.

Exemple 12.2 Si on se place sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous avons défini une loi de composition interne $+$ et une loi de composition externe dans le Chapitre 6. En effet,

$$\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\, M + N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\, \lambda \cdot M = \lambda M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Dire qu'un ensemble E est un espace vectoriel, c'est mettre une loi externe et interne sur E tel que ces deux lois vérifient un certain nombre de propriétés.

Définition 12.2 On appelle **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$ ou plus simplement espace vectoriel, tout ensemble E non vide, muni d'une loi de composition interne (notée $+$) et d'une loi de composition externe (notée $\cdot$) et qui vérifie les propriétés suivantes:

- $\forall (x,y) \in E^2 \quad x + y = y + x$ (on dit que la loi $+$ est **commutative**)
- $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad x + (y + z) = (x + y) + z$ (on dit que la loi $+$ est **associative**)
- Il existe un élément de E noté 0_E tel que: $\forall x \in E \quad x + 0_E = 0_E + x = x$.
  (0_E est appelé **élément neutre** de E pour la loi $+$, il est noté 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté)
- Pour tout élément x de E, il existe un élément y de E qui vérifie: $x + y = y + x = 0_E$.
  (y est appelé **opposé** de x, il est noté $-x$)
- $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall (x,y) \in E^2 \quad \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in E \quad (\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in E \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$

Remarque :

- *Lorsque E est un espace vectoriel, les éléments de E sont appelés les* ***vecteurs*** *et les éléments de $\mathbb{R}$ les* ***scalaires****.*
- *L'élément neutre 0_E (souvent noté simplement 0 mais à ne pas confondre avec zéro) est appelé vecteur nul, il est présent dans tout espace vectoriel.*
- *Le symbole $\cdot$ qui se trouve entre un scalaire et un vecteur est la plupart du temps omis, comme c'est le cas par exemple lorsqu'on multiplie une matrice A par un réel 2 : on écrit $2A$ et non $2 \cdot A$.*

Propriété 12.1 Un espace vectoriel E possède un unique élément neutre et chaque vecteur de E possède un unique opposé.

Démonstration.

- Supposons qu'on a deux éléments neutres : e et e'. Alors, comme e et e' sont des éléments neutre. On a :
$$e + e' = e \quad \text{et} \quad e + e' = e'.$$
Ainsi $e = e'$ et l'élément neutre est unique.
- Soit $x \in E$ et supposons que y et y' sont deux opposés du vecteur x. Alors :
$$x + y = e \quad \text{et} \quad x + y' = e$$
Ainsi :
$$y = y + e = y + (x + y') = (y + x) + y' = e + y' = y'.$$
D'où l'unicité de l'opposé de x.

□

Exemple 12.3 Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$:

- Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit $x+y$ comme $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une opération interne dans $\mathbb{R}^2$, qui vérifie les propriétés :

  Commutativité pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,
$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = y + x$$

Associativité pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(x+y)+z &= (x_1+y_1, x_2+y_2)+(z_1,z_2) = (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2)\\ &= (x_1,x_2)+(y_1+z_1, y_2+z_2) = x+(y+z)\end{aligned}$$

Elément neutre il existe un élément $e = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$x + e = x = e + x.$$

Opposé pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, il existe $x' = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$x + x' = e = x' + x.$$

- Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\alpha \cdot x$ comme $(\alpha x_1, \alpha x_2) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une multiplication externe, qui vérifie les propriétés :

  1. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

  $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot x &= ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2)\\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x\end{aligned}$$

  2. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

  $$\begin{aligned}\alpha\cdot(x+y) &= \alpha\,(x_1+y_1, x_2+y_2) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2)\\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha\cdot x + \alpha \cdot y\end{aligned}$$

  3. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

  $$\alpha\cdot(\beta\cdot x) = \alpha\cdot(\beta x_1, \beta x_2) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) = (\alpha\beta)\cdot x$$

  4. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 1 \cdot x = (x_1, x_2) = x$.

Donc $\left(\mathbb{R}^2, +, .\right)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

12.1.2 Espaces vectoriels de référence

Exemple 12.4 1. Les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ avec les lois $+$ et $\cdot$ définies dans le Chapitre 6 sont des espaces vectoriels.
Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **est un espace vectoriel**.

Par exemple, pour $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'élément neutre est la matrice nulle $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et l'opposé de $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ est $-x = \begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\\-x_3\end{pmatrix}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ **est un espace vectoriel.**
   Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. On a :

   $$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

   et

   $$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

   Le neutre est $0 = (0, 0, \cdots, 0)$.
   L'opposé $(-x)$ de $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est $(-x_1 -, x_2, \cdots, -x_n)$.
   En particulier, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sont des espaces vectoriels.

3. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'ensemble des matrices de taille n et p noté $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ **est un espace vectoriel.**
   L'addition de matrices et la multiplication par une constante ont été définis dans le Chapitre 6.
   L'élément neutre est la matrice nulle $0_{n,p}$.
   L'opposé d'une matrice M est la matrice $-M$ dont les coefficients sont les opposés de ceux de la matrice M.

4. L'ensemble des polynômes $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ **est un espace vectoriel**.
   L'addition de polynômes et la multiplication par une constante ont été définis dans le Chapitre 8.
   L'élément neutre est le polynôme nul $P = 0$.
   L'opposé d'un polynôme $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ est le polynôme $-P = -a_n x^n - a_{n_1} x^{n-1} - \ldots - a_1 x - a_0$.

5. L'ensemble des suites $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ **est un espace vectoriel.**
   L'élément neutre est la suite nulle.
   L'opposé d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $-(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. L'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ (resp $(\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ **est un espace vectoriel**.
   L'élément neutre est la fonction nulle $f = 0$.
   L'opposé d'une fonction f est la fonction $-f$ définie par $\forall x \in I$, $(-f)(x) = -f(x)$.

Exemple 12.5 $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ **n'est pas** un espace vectoriel.
En effet, par exemple, pour $x = 3 \in \mathbb{N}$ et $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, $\lambda x = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.

12.1.3 Propriétés

Proposition 12.1 **(Règles de calcul)** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in E$, on a :

1. $\lambda \cdot 0_E = 0_E \quad$ et $\quad 0 \cdot x = 0_E$,
2. $\lambda \cdot x = 0_E \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 0$ ou $x = 0_E$,
3. $(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$.

Remarque :

- *Dans la suite* $(-\lambda \cdot x)$ *sera donc noté* $-\lambda \cdot x$ *ou encore* $-\lambda x$ *et* $x + (-y)$ *sera noté* $x - y$.
- *On en déduit que :* $\lambda x = \mu x \iff \lambda = \mu$ *ou* $x = 0_E$
  et $\lambda x = \lambda y \iff \lambda = 0$ *ou* $x = y$.

Remarque : Concernant les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$, *pour* $n = 2$, *il s'agit des vecteurs du plan et pour* $n = 3$ *les vecteurs de l'espace. La représentation graphique permettra de rendre les choses moins abstraites. Pour* $n \geqslant 4$, *il faut faire preuve d'un peu plus d'abstraction.*

12.1.4 Combinaison linéaire

Définition 12.3 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **famille** de vecteurs de E tout p-uplet $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ formé de p vecteurs de E.

Exemple 12.6 Soit $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \in E$ et $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$.
Alors (x, y) est une famille de vecteurs de E.

Définition 12.4 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E.
On dit qu'un vecteur x de E est **combinaison linéaire** des p vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$ s'il existe p réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ tels que:

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

Les scalaires λ_i sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 12.7 Le vecteur $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi que de $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
En effet,

$$5e_1 - 2e_2 + 0e_3 = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$5f_1 - 7f_2 - 5f_3 = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 12.8 1. Le vecteur $(5,6,9) \in \mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. En effet,

$$(5,6,9) = 5e_1 + 6e_2 + 9e_3.$$

2. $P(x) = 7x^2 - 6x + 1$ est une combinaison linéaire de $e_1 = 1$, $e_2 = x$ et $e_3 = x^2$ car

$$P(x) = 7e_3 - 6e_2 + e_1.$$

Remarque : Le vecteur nul 0_E est combinaison linéaire de n'importe quels autres vecteurs.

Méthode 12.1 (Pour vérifier que x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$)

1. On peut en trouver une à l'oeil ou grâce à une astuce.
2. Sinon, on procède par identification pour trouver les λ_i et on résout le système correspondant.

Attention, il est possible de ne pas trouver de combinaison linéaire !

Exercice type 12.1 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille (e_1, e_2, e_3).

x est combinaison linéaire de la famille (e_1, e_2, e_3) si et seulement si il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3.$$

Cette relation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Cela est équivalent au système :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & & & = & 1 \\ 2\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & -1 \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

$L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & & & = & 1 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 1 \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & & & = & 1 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 1 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Le système est alors échelonné et on sait le résoudre :

$$\lambda_3 = -2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 - 1 = -3, \quad \lambda_1 = -3\lambda_2 - 1 = 8.$$

On vérifie bien que $8e_1 - 3e_2 - 2e_3 = x$.

Exercice 12.1 Dans $\mathbb{R}[x]$, montrer que $P(x) = 2x^2 - x + 3$ n'est pas une combinaison linéaire de $P_1(x) = (x-1)^2$ et de $P_2(x) = x$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$. Cette égalité s'écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2x^2 - x + 3 = \lambda_1(x-1)^2 + \lambda_2 x.$$

Elle est donc en particulier vraie pour $x = 0$ et $x = 1$. Cela nous donne alors :

$$3 = \lambda_1 \text{ et } 4 = \lambda_2.$$

Or $3P_1(x) + 4P_2(x) = 3x^2 - 2x + 3$, ainsi $2x^2 - x + 3 = 3x^2 - 2x + 3$.
Absurde. Le polynôme P n'est donc pas combinaison linéaire de P_1 et de P_2.

12.2 Sous-espaces vectoriels

12.2.1 Définition et caractérisation

Définition 12.5 Soit E un espace vectoriel. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est un espace vectoriel et si $F \subset E$.

Exemple 12.9 $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Théorème 12.1 F est un sous-espace vectoriel de E (en abrégé: **s.e.v.**) si et seulement si F est une partie non vide de E telle que:

- $\forall (x, y) \in F^2 \quad x + y \in F$ (on dit que F est **stable pour l'addition**)
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in F \quad \lambda \cdot x \in F$ (on dit que F est **stable pour la multiplication par un scalaire**)

Remarque : Une des manières que vous utiliserez en pratique pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel sera de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Propriété 12.2 Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$ alors $0_E \in F$.

Démonstration. Soit F un s.e.v d'un espace vectoriel E. Par hypothèse, F est non vide, il existe donc $x \in F$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, cela entraîne $0x \in F$, or $0x = 0_E$ donc $0_E \in F$. □

Corollaire 12.1 F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $F \subset E$
- $F \neq \emptyset$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall (x,y) \in F^2 \quad \lambda x + y \in F$

Remarque : En général, pour montrer que F est non vide, on vérifie que 0_E appartient à F.

Exemple 12.10 Considérons le système linéaire :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Les solutions de (S) sont les triplets $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant les deux équations du système. La résolution d'un tel système est bien connue : elle se fait par la méthode du pivot de Gauss. Montrons que l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de ce système est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Par définition :

$$\mathscr{S} = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

• On a clairement $\mathscr{S} \subset \mathbb{R}^3$.
• Le vecteur nul $(0,0,0)$ est solution de (S) donc $(0,0,0) \in \mathscr{S}$. Ainsi $\mathscr{S} \neq \emptyset$.
• Soit $X = (x_1,x_2,x_3) \in \mathscr{S}$ et $Y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathscr{S}$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda X + Y \in \mathscr{S}$, c'est à dire que $\lambda X + Y$ est solution du système.
On calcule $\lambda X + Y = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \lambda x_3 + y_3) := (z_1,z_2,z_3)$.
Puis, on vérifie que (z_1,z_2,z_3) est solution du système :
★ Montrons que (z_1,z_2,z_3) vérifie bien la première ligne du système :

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 - z_3 &= \lambda x_1 + y_1 + 2(\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \\ &= \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3) + y_1 + 2y_2 - y_3 \\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

★ De même, on montre que (z_1, z_2, z_3) vérifie bien la deuxième ligne du système:

$$\begin{aligned} -z_1 + z_2 + z_3 &= -(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) + (\lambda x_3 + y_3) \\ &= \lambda(-x_1 + x_2 + x_3) + (-y_1 + y_2 + y_3) \\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Nous venons donc de montrer que (z_1, z_2, z_3) est solution du système donc $(z_1, z_2, z_3) \in \mathscr{S}$ et donc $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 12.2 L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 12.11 On note E l'espace vectoriel des suites réelles. Soit F l'ensemble des suites réelles convergentes, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

- On a clairement $F \subset E$.
- La suite nulle converge (vers 0) donc est dans F. Ainsi $F \neq \emptyset$.
- Soit $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in F^2$ et on note ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites réelles respectives. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle et par propriété des suites convergentes, elle converge vers la limite $\lambda\ell_1 + \ell_2 \in \mathbb{R}$. Donc $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

On peut donc en conclure que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice type 12.2 Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On applique le Corollaire 12.1 pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- On a clairement $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- $2 \times 0 + 0 - 0 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$. Ainsi $F \neq \emptyset$.
- Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda X + Y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Calculons $2z_1 + z_2 - z_3$, on a :

$$\begin{aligned} 2z_1 + z_2 - z_3 &= 2(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \\ &= \lambda(2x_1 + x_2 - x_3) + 2y_1 + y_2 - y_3 \\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda X + Y \in F$. Nous venons donc de démontrer que F est un s.e.v. de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 12.2 Pourquoi les ensembles suivants ne sont-ils pas des espaces vectoriels?

1. $J = \emptyset$. Par définition, un espace vectoriel est non vide.
2. $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 1 \right\}$. $0 + 0 \neq 1$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin K$
3. $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \geqslant 0 \right\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in L$, soit $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$, $\lambda X = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \notin L$.

12.2.2 Intersection et union de sous-espaces vectoriels

Certaines opérations sur les ensembles se comportent bien avec les espaces vectoriels. C'est le cas de l'intersection.

Propriété 12.3 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

- On sait que $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$, or $F \subset E$ et $G \subset E$ donc $F \cap G \subset E$.
- On sait que $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E \in F \cap G$. Ainsi $F \cap G \neq \emptyset$.
- Soit $(x, y) \in (F \cap G)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $(x, y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda x + y \in F$ car F est un s.e.v. On peut raisonner de la même façon pour G et donc $\lambda x + y \in G$. Ainsi $\lambda x + y \in G$.

On en conclut que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple 12.12 Si on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ alors $F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0\}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Attention ! Le résultat précédent est faux pour l'union de deux s.e.v. En effet, $\{0\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \{0\}$ sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ mais $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$. car il contient $(0, 1)$ et $(1, 0)$ mais pas leur somme $(1, 1)$.

12.2.3 Sous-espace vectoriel engendré

Définition 12.6 Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E.
On appelle $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $e_1, \cdots e_p$.

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p) = \left\{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p \quad | \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\right\}.$$

Exemple 12.13 Soit $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de E.

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \left\{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \quad | \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad | \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Ainsi, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \left\{\begin{pmatrix} \lambda_1 - 3\lambda_2 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} \quad | \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Théorème 12.2 Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E.
L'ensemble $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace vectoriel engendré** par $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

Démonstration.

- E étant stable par combinaison linéaire, on a $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p) \subset E$.
- $0_E = 0e_1 + 0e_2 + \ldots + 0e_p$ donc $0_E \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$. L'ensemble n'est donc pas vide.
- Soient x et y deux vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i$. On a alors, par linéarité de la somme:

$$\lambda x + y = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i e_i + \sum_{i=1}^{p} y_i e_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda x_i + y_i) e_i.$$

  Ainsi $\lambda x + y \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.

Donc $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple 12.14 Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ engendré par la famille de vecteurs $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

Exemple 12.15 Montrons que $\mathrm{Vect}((1,2),(1,0)) = \mathbb{R}^2$.
L'inclusion $\mathrm{Vect}((1,2),(1,0)) \subset \mathbb{R}^2$ est évidente.
Réciproquement, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = \frac{y}{2}(1,2) + \left(x - \frac{y}{2}\right)(1,0) \in \mathrm{Vect}((1,2),(1,0)) = \mathbb{R}^2$, d'où $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Vect}((1,2),(1,0)) = \mathbb{R}^2$. Les deux ensembles sont donc égaux.

Remarque : Ce théorème nous fournit une autre méthode pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel. Il faut alors identifier les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$ tels que F soit l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs. Alors $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et F est donc un sous-espace vectoriel.

Exercice type 12.3 Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad x + y + z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = -x - y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

F est donc l'espace engendré par les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

12.3 Base d'un espace vectoriel

12.3.1 Familles libres et génératrices

Définition 12.7 Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $e_1, e_2, \dots, e_p$ des vecteurs de F.

On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une **famille génératrice** de F si

$$F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p),$$

c'est-à-dire si tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$:

$$\forall x \in F \qquad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \qquad x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p.$$

Attention ! Rien n'assure l'unicité des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ c'est à dire l'unicité de l'écriture du vecteur x comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$: une condition supplémentaire est nécessaire. (voir section suivante)

Exemple 12.16 Reprenons le cas de l'Exercice type 12.3, on a $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et donc (e_1, e_2) est une famille génératrice de F.

Exemple 12.17 Déterminer une famille génératrice de

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+2c \\ a+c \\ b+c \\ -b-c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \quad \middle| \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

On a :

$$H = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \middle| \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

H est donc l'espace engendré par les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$. Une famille génératrice de H est donc donnée par (e_1, e_2, e_3).

Proposition 12.3 Les opérations suivantes transforment une famille génératrice en une nouvelle famille génératrice:

- Échanger l'ordre des vecteurs de la famille,
- Enlever un vecteur nul,
- Enlever un vecteur qui apparaît deux fois,
- Enlever un vecteur qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille,
- Multiplier un vecteur par une constante non nulle,
- Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille.

Démonstration. Démontrons le point 4 de cette proposition. Soit E un espace vectoriel, soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille génératrice de E, montrons que si e_p peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}$ alors $(e_1, e_2, \ldots, e_{p-1})$ est une famille génératrice de E.
Soit $x \in E$ alors $\exists (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$. De plus, e_p peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}$ donc $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tels que $e_p = \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k e_k$. On a donc :

$$x = \sum_{k=1}^{p-1} (x_k + \alpha_k) e_k.$$

Donc x peut s'écrire comme combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \ldots, e_{p-1})$, ce qui prouve que $(e_1, e_2, \ldots, e_{p-1})$ est une famille génératrice de E. $\square$

Exemple 12.18 Déterminer une famille génératrice de

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+2c \\ a+c \\ b+c \\ -b-c \end{pmatrix} \quad \middle| \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

formée de 2 vecteurs.

Dans l'Exemple 12.17, la famille (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une famille génératrice de H.
On remarque que $e_1 + e_2 = e_3$. Le vecteur e_3 est donc une combinaison linéaire de e_1 et e_2. Ainsi la famille (e_1, e_2) est également une famille génératrice de H.

Définition 12.8 Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $e_1, e_2, \dots, e_p$ des vecteurs de F.
On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une **famille libre** de F si aucun vecteur n'est combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille, c'est-à-dire si:

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \qquad \Big(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p = 0_E \Big) \Longrightarrow \Big(\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0 \Big)$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Exemple 12.19 La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est-elle une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$. A-t-on $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$?

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

On obtient $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = -3\lambda_2 = -3\lambda_1$ et $\lambda_1 = -2\lambda_3$. Ainsi $\lambda_3 = -3 \times (-2\lambda_3) = 6\lambda_3$ donc $\lambda_3 = 0$. On obtient aussi $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$.
En conclusion, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc la famille est libre.

Exercice 12.3 Etudier la liberté des familles de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

1. $((1,0),(1,1))$

   Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda(1,0) + \mu(1,1) = (0,0)$. Alors $\lambda + \mu = 0$ et $\mu = 0$. On en déduit que $\lambda = \mu = 0$. Ainsi la famille est libre.

2. $((1,2),(3,6))$

   On remarque que $3(1,2)-(3,6)=(0,0)$. La famille est donc liée.

Exercice 12.4 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x$ et $g(x)=\mathrm{e}^{2x}$. La famille (f,g) est-elle libre dans l'espace vectoriel des fonctions réelles?

Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Supposons que $\lambda f+\mu g=0$, où 0 représente ici la fonction nulle. Alors pour tout x réel, $\lambda e^x+\mu e^{2x}=0$. Cette égalité est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur des fonctions dérivables, et on trouve pour tout réel x,

$$\lambda e^x+2\mu e^{2x}=0$$

En soustrayant ces deux égalités, on trouve $\mu=0$. On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lambda e^x=0$ et donc $\lambda=0$. La famille est donc libre.
Autre méthode : Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Supposons que $\lambda f+\mu g=0$. Alors pour tout x réel, $\lambda e^x+\mu e^{2x}=0$. En particulier, on peut diviser par $e^x>0$: $\forall x\in\mathbb{R}, \lambda+\mu e^x=0$.
En prenant la limite pour $x\to-\infty$, on obtient $\lambda=0$.
Donc $\forall x\in\mathbb{R}, \mu e^x=0$ La valeur en $x=0$ donne $\mu=0$.
On a montré que $\lambda=\mu=0$, la famille est donc libre.

Proposition 12.4 Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Démonstration. On va montrer que si on enlève un élément à une famille libre, la nouvelle famille obtenue reste libre. Le résultat général se montre ensuite par récurrence décroissante. Soit $\left(e_1,e_2,\ldots,e_p\right)$ une famille libre, montrons que $\left(e_1,e_2,\ldots,e_{p-1}\right)$ l'est aussi. Soit $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}$ des scalaires, on suppose que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_k e_k=0_E$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_k e_k+0\cdot e_p=0_E$.
Comme la famille $\left(e_1,e_2,\ldots,e_p\right)$ est libre, alors pour tout $k\in[\![1,p-1]\!], \alpha_k=0$.
Donc $\left(e_1,e_2,\ldots,e_{p-1}\right)$ est une famille libre. □

Proposition 12.5 Soit E un espace vectoriel. Une famille $(e_1,e_2,\ldots,e_p)$ est liée si et seulement si au moins un des vecteurs de cette famille peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

<u>Remarque</u> : En particulier :

1. *Une famille dont l'un des vecteurs est nul est liée car si $e_1=0_E$, $e_1=0e_2+\ldots+0e_p$.*
2. *Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée.*
3. *Une famille formée d'un seul vecteur non nul est libre.*
4. *Une famille (e_1,e_2) est liée si et seulement si e_1 et e_2 sont colinéaires.*

Démonstration. On montre le résultat en raisonnant par double implication.
($\Longrightarrow$) Supposons que $\left(e_1, e_2, \ldots, e_p\right)$ est liée. Alors, il existe $(\alpha_i)_{i\in[1,p]} \in \mathbb{K}^p$ et $j \in [\![1,p]\!]$ tels que $\alpha_j \neq 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i = 0_E$. On peut donc écrire

$$e_j = -\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} e_i - \sum_{i=j+1}^{p} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} e_i.$$

($\Longleftarrow$) Réciproquement, on suppose qu'il existe $j \in [\![1,p]\!]$ et $(\beta_i)_{i\in[1,j-1]\cup[j+1,p]} \in \mathbb{K}^{p-1}$ tels que

$$e_j = \sum_{i=1}^{j-1} \beta_i e_i + \sum_{i=j+1}^{p} \beta_i e_i$$

En posant $\beta_j = -1 \neq 0$, on trouve alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \beta_i e_i = 0_E$, où les β_i ne sont pas tous nuls. La famille est donc liée. □

Exemple 12.20

- La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille liée de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Méthode 12.2 (Comment montrer qu'une famille U est libre?)

1. Si U comprend un unique élément u, il suffit de montrer que $u \neq 0$.
2. Si U est une famille à 2 éléments u et v, il suffit de montrer que u et v ne sont pas colinéaires.
3. Si la famille U comporte 3 éléments ou plus, on revient à la Définition 12.8 d'une famille libre.
4. S'il s'agit de polynômes
   (a) dans certains cas, on peut montrer la liberté de la famille en montrant que c'est une famille de polynômes non nuls échelonnés en degré
   (b) si les polynômes ne sont pas échelonnées en degré, il faut revenir à la Définition 12.8.

Remarque : Le dernier point découle du résultat suivant :

Proposition 12.6 Toute famille de polynômes non nuls échelonnés en degré est une famille libre.

Démonstration. A rédiger. □

Exemple 12.21

1. Justifier que la famille $((2,5))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

   $(2,5) \neq (0,0)$ donc $(2,5)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

2. Justifier que la famille $((1,2,3),(0,1,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

   $(1,2,3)$ et $(0,1,1)$ sont non colinéaires. Donc la famille $((1,2,3),(0,1,1))$ est libre.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose : $x^{<k>} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(x+i-1) & \text{si } k \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$.

   Montrer que $\left(x^{<0>}, x^{<1>}, \ldots, x^{<n>}\right)$ est une famille libre dans $\mathbb{R}[x]$.

   $$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \deg\left(x^{<k>}\right) = \deg\left(\prod_{i=1}^{k}(x+i-1)\right) = k$$

   De plus, $\deg\left(x^{<0>}\right) = 0$ car $x^{<0>} = 1$. Ainsi, la famille $\left(X^{<0>}, x^{<1>}, \ldots, x^{<n>}\right)$ forme une famille de $(n+1)$ polynômes non nuls échelonnés en degrés. Donc $\left(x^{<0>}, x^{<1>}, \ldots, x^{<n>}\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[x]$.

12.3.2 Base d'un espace vectoriel

Définition

Définition 12.9 Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $e_1, e_2, \ldots, e_p$ des vecteurs de F.
On dit que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une **base** de F si et seulement si tout $x \in F$ se décompose de manière **unique** sous forme d'une combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.
Autrement si :

$$\forall x \in F, \quad \exists!(x_1, x_2, \ldots, x_p), \text{ tel que } x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots x_p e_p.$$

Ce p-uplet représente les coordonnées de x dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$

<u>Remarque</u> : On dit alors que F est de dimension p. RDV au second semestre.

Exemple 12.22 Dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, soient $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ alors la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

En effet, soit $X = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On cherche un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X = xe_1 + ye_2$. On a :

$$X = xe_1 + ye_2 \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x\cdot 1 & + & y\cdot 0 & = & a \\ x\cdot 0 & + & y\cdot 1 & = & b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & a \\ y & = & b \end{array}\right.$$

X s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire de (e_1, e_2) avec $X = ae_1 + be_2$. Donc (e_1, e_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 12.7 Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $e_1, e_2, \ldots, e_p$ des vecteurs de F.
La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une **base** de F si et seulement si $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est à la fois une famille **libre** et une famille **génératrice** de F.

Exercice type 12.4 Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Déterminer les coordonnées de $X = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice. Notons (e_1, e_2, e_3) les vecteurs de cette famille.

- **Famille libre** : Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

  On obtient alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est bien libre.

- **Famille génératrice** :
  Soit $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, on cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = ae_1 + be_3 + ce_3$. On a :

$$X = ae_1 + be_3 + ce_3 \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} & & b & + & 3c & = & x_1 \\ a & & & & & = & x_2 \\ a & + & b & & & = & x_3 \end{array}\right.$$

  On résout facilement ce système et on obtient :

$$a = x_2, \quad b = x_3 - x_2, \quad c = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{3}.$$

La famille (e_1,e_2,e_3) est donc bien une famille génératrice.
La famille $\mathcal{B}$ étant libre et génératrice, c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Déterminons les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

On cherche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $X = ae_1 + be_2 + ce_3$.

$$X = ae_1 + be_3 + ce_3 \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & b & + & 3c & = & 1 \\ a & & & & & = & 1 \\ a & + & b & & & = & 3 \end{array} \right.$$

On résout facilement ce système et on obtient :

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = 0.$$

Les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$ sont donc $(2,1,0)$.

Exercice 12.5 Soit E l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. En déterminer une base.

1. On montre que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles :

   - La suite nulle vérifie la relation de récurrence proposée, donc E est non vide.
   - Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $w_n = \lambda u_n + v_n$, alors,

   $$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= (\lambda u_{n+1} + u_n) + v_{n+1} + v_n \text{ car } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \\ &= \lambda w_{n+1} + w_n \end{aligned}$$

   Donc $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

   E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles, c'est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, c'est une suite récurrente linéaire d'ordre deux, d'équation caractéristique $q^2 = q + 1$, dont les solutions sont:

   $$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

   D'après le cours sur les suites réelles, il existe donc deux réels α et β tels que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n.$$

Montrons que la famille (q_1^n, q_2^n) est une famille génératrice et libre de E.

- D'après la relation précédente, on peut affirmer que la famille (q_1^n, q_2^n) engendre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Reste à montrer que ces éléments sont dans E.
  On a $\forall n \in \mathbb{N}$,
  $$q_1^n + q_1^{n+1} = q_1^n(1+q_1) = q_1^n q_1^2 = q_1^{n+2}$$
  car q_1 est solution de l'équation caractéristique, donc $q_1^2 = q_1 + 1$. Donc $\left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.
  On montre de même que $\left(q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.
  On en conclut que $\left(\left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est **une famille génératrice de E.**
- Montrons que cette famille est libre.
  Soit λ et μ deux réels, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda q_1^n + \mu q_2^n = 0$.
  On trouve en particulier pour $n = 0$ et $n = 1$ que $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda q_1 + \mu q_2 = 0$.
  Donc $\lambda = -\mu$ et $\mu(q_2 - q_1) = 0$. Cela donne $\lambda = \mu = 0$.
  Ainsi $\left(\left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est **une famille libre de** E.
- En conclusion, $\left(\left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est **une base de E.**

Bases canoniques des espaces vectoriels usuels

1. Pour $\mathbb{R}^n$:

   Pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
   $$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1(1,0,0,\cdots,0) + x_2(0,1,0,\cdots,0) + \cdots + x_n(0,0,0,\cdots,1).$$
   Cette décomposition est unique de manière évidente.
   Considérons donc la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ définis par :
   $$e_1 = (1,0,0,\cdots,0), \quad e_2 = (0,1,0,\cdots,0), \cdots, e_n = (0,0,0,\cdots,1).$$
   Cette famille est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée base canonique.

2. Pour $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

   La base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Elle est constituée de n vecteurs.

3. Pour $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$:

   $$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{E_{1,1}} + b\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{E_{1,2}} + c\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{E_{2,1}} + d\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{E_{2,2}}$$

C'est donc un espace vectoriel de dimension $2*2=4$ et de base canonique $E_{i,j}$ où $E_{i,j}$ désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui est 1.
Les coordonnées d'une matrice dans cette base sont donc ses coefficients.

4. Plus généralement, pour $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n,p\in\mathbb{N}^*$:

   Soit $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en ligne i et colonne j qui vaut 1, la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
   Les coordonnées d'une matrice dans cette base sont donc ses coefficients.

5. Pour $\mathbb{R}_n[x]$:

   La base canonique est la suivante : $(1,x,x^2,\cdots,x^n)$ car par définition tout polynôme de degré inférieur à n peut s'écrire comme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ de manière unique.
   Les coordonnées d'un polynôme dans cette base sont ses coefficients.

Exemple 12.23 Décomposons dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ le vecteur : $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$
On a :

$$\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=3e_1-e_2.$$

Définition 12.10 Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E. Tout élément $x\in E$ s'écrit :

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i \qquad \text{avec } x_i\in\mathbb{R}, \forall i\in[\![1,n]\!].$$

La matrice colonne $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}$ est appelée **matrice colonne des coordonnées** du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque : Dans le cas où $E=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de E. Tout vecteur x est une matrice colonne qui coïncide avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 12.24 On se place sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$. Soit $\mathcal{B}=(P_1,P_2,P_3)=(1,x,x^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. On introduit les polynômes :

$$Q:x\mapsto x \quad ; \quad R:x\mapsto x^2+1 \quad ; \quad S:x\mapsto x^2-1.$$

1. Déterminer la matrice colonne des coordonnées de chaque polynôme ci-dessus dans la base $\mathcal{B}$.

On a $Q = x = P_2$. Ainsi la matrice colonne de ses coordonnées est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a $R = x^2 + 1 = P_1 + P_3$. Ainsi la matrice colonne de ses coordonnées est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $S = x^2 - 1 = -P_1 + P_3$. Ainsi la matrice colonne de ses coordonnées est $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (Q, R, S)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

   Montrons que tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[x]$ se décompose de manière unique dans cette famille. C'est à dire montrons qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que $P = \lambda_1 Q + \lambda_2 R + \lambda_3 S$. Posons $P = ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a alors :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \lambda_1 x + \lambda_2(x^2 + 1) + \lambda_3(x^2 - 1) \\ &= (\lambda_2 + \lambda_3)x^2 + \lambda_1 x + (\lambda_2 - \lambda_3). \end{aligned}$$

   Par identification des coefficients, on obtient le système:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & a \\ \lambda_1 & & & & & = & b \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & -c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & b \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & a \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & c \end{array} \right.$$

   On résout facilement ce système et on obtient une unique solution

$$\lambda_1 = b, \quad \lambda_2 = \frac{a + c}{2}, \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{a - c}{2}.$$

   La famille (Q, R, S) est donc une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

3. Soit $P = 5x^2 + x - 1$. Déterminer les matrices colonne des coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base $\mathcal{B}'$.

   $P = -P_1 + P_2 + 5P_3$, la matrice colonne des coordonnées de P dans $\mathcal{B}$ est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   En montrant que la famille $\mathcal{B}'$ était une base, on a également montré que tout polynôme $P = ax^2 + bx + c$ s'écrivait :

$$P = bQ + \left(\frac{a + c}{2}\right)R + \left(\frac{a - c}{2}\right)S.$$

   Ainsi la matrice colonne des coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} b \\ \frac{a+c}{2} \\ \frac{a-c}{2} \end{pmatrix}$.

   On en déduit donc que la matrice colonne des coordonnées de $P = 5x^2 + x - 1$ dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.