11. Probabilités sur un univers fini

Le but de ce chapitre est de mettre en place un cadre théorique pour le calcul des probabilités, dans le cas où l'univers est fini. Les notions vues en classe de terminale sont approfondies, et l'approche via les arbres pondérés est remplacée par des raisonnements sur les événements, qui nécessitent la maîtrise des formules littérales, des opérations sur les ensembles et plus de rigueur et de rédaction en général.

11.1 Le cadre probabiliste

11.1.1 Un peu de vocabulaire

Définition 11.1 Une **expérience aléatoire** est une expérience dont l'issue (ou résultat) ne peut être prévu. La répétition d'une telle expérience ne donne, a priori, pas le même résultat.

Exemple 11.1

1. Lancer un dé à 6 faces et noter le résultat;
2. Lancer une pièce de monnaie et noter le résultat;
3. Lancer une copie du haut d'un escalier à 21 marches et obtenir la note de la copie.

Définition 11.2 **L'univers** est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. Il est souvent noté Ω. Une issue est un élément $\omega \in \Omega$.

Exemple 11.2

1. $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1;6]\!]$;
2. $\Omega = \{pile; face\}$;
3. $\Omega = \{0;1;2;3;\ldots;18;19;20\} = [\![0;20]\!]$.

Définition 11.3 Un **événement** est une affirmation liée à l'expérience aléatoire et dont la réalisation dépend du résultat de l'expérience.
Dans le cas où l'univers Ω est fini, on peut associer de manière unique un événement A à une partie (ou sous-ensemble) de Ω, que l'on note également A :

$$A = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \text{ réalise } A\}.$$

Autrement dit, si $\omega \in \Omega$ est un résultat de l'expérience, alors ω réalise A, si et seulement si, $\omega \in A$.

Exemple 11.3

1. On considère l'événement : "Obtenir un numéro impair".
   La partie (ou sous-ensemble) associée est $A = \{1;3;5\}$.
2. On considère l'événement : "Obtenir face".
   La partie (ou sous-ensemble) associée est $A = \{face\}$.
3. On considère l'événement : "Avoir la moyenne".
   La partie (ou sous-ensemble) associée est $A = \{10;11;\ldots;19;20\} = [\![10;20]\!]$.

<u>Remarque</u> : L'ensemble des parties de Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$. Il vérifie les propriétés suivantes (que nous reverrons plus tard):

- $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$;
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \overline{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$;
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad A \cup B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$\mathcal{P}(\Omega)$ correspond donc à l'ensemble des événements.

11.1.2 Lien entre terminologie probabiliste et ensembliste

On effectue une expérience aléatoire. On note Ω l'univers. On considère A et B deux événements liés à l'expérience aléatoire.

Définition 11.4 (Événement élémentaire, certain, impossible) Un événement est dit

- **élémentaire** lorsque la partie associée est réduite à un élément (on parle de singleton) ;
- **certain** s'il est toujours réalisé (c'est alors Ω) ;
- **impossible** s'il n'est jamais réalisé (c'est alors $\emptyset$).

L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω est l'ensemble formé de tous les événements associés à l'expérience aléatoire considérée.

Exemple 11.4

1. "Obtenir 5" est un événement élémentaire, associé au singleton $\{5\}$.
2. "Obtenir pile ou face" est un événement certain, associé à la partie Ω.
3. "Avoir une note négative" est un événement impossible, associé à la partie $\emptyset$.

Définition 11.5 (Evénement contraire) Soit $\omega \in \Omega$. On dit que ω réalise **l'événement contraire** de A, si et seulement si, ω ne réalise pas A. On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A. La partie $\overline{A}$ associée est la partie constituée de tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. Autrement dit, $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Exemple 11.5

1. Soit A l'événement "obtenir un nombre pair". La partie associée est $A = \{2;4;6\}$. L'événement contraire est $\overline{A}$: "obtenir un nombre impair". La partie associée est $\overline{A} = \{1;3;5\}$.
2. Soit A l'événement "obtenir face". La partie associée est $A = \{face\}$. L'événement contraire est $\overline{A}$: "obtenir pile". La partie associée est $\overline{A} = \{pile\}$.
3. Soit A l'événement "avoir une note supérieure ou égale à 12". La partie associée est $A = [\![12;20]\!]$. L'événement contraire est $\overline{A}$: "avoir une note inférieure ou égale à 11". La partie associée est $\overline{A} = [\![0;11]\!]$.

Définition 11.6 On dit que l'événement A **implique** l'événement B si la réalisation de l'événement A implique celle de l'événement B. En terme ensembliste, cela signifie :

$$A \text{ implique } B \iff A \subset B.$$

Exemple 11.6 Considérons l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé à 6 faces deux fois de suite. Soit A l'événement "faire un 6 au premier lancer" et B l'événement "faire au moins un 6". Les parties associées sont :

$$A = \{(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6)\},$$
$$B = \{(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6);(1;6);(2;6);(3;6);(4;6);(5;6)\}.$$

L'événement A implique l'événement B, et les parties associées vérifient bien $A \subset B$.

Définition 11.7 On dit que l'événement A **ou** B est réalisé, si et seulement si, au moins l'un des deux événements A ou B est réalisé. La partie associée est $A \cup B$.

Exemple 11.7 On reprend l'expérience précédente. Soit A l'événement "faire un 3 au premier lancer" et B l'événement "faire un 5 au deuxième lancer". Les parties associées sont :

$$A = \{(3;1);(3;2);(3;3);(3;4);(3;5);(3;6)\},$$
$$B = \{(1;5);(2;5);(3;5);(4;5);(5;5);(6;5)\}.$$

L'événement A ou B est "faire un 3 au premier lancer ou un 5 au deuxième lancer" et la partie associée est :

$$A \cup B = \{(3;1);(3;2);(3;3);(3;4);(3;5);(3;6);(1;5);(2;5);(4;5);(5;5);(6;5)\}.$$

Définition 11.8 On dit que l'événement A **et** B est réalisé, si et seulement si, les deux événements A et B sont réalisés. La partie associée est $A \cap B$.

Exemple 11.8 Reprenons l'exemple précédent. L'événement A et B est "faire un 3 au premier lancer et un 5 au deuxième lancer" et la partie associée est :

$$A \cap B = \{(3;5)\}.$$

Définition 11.9 On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si l'événement A et B est impossible. Autrement dit, les événements A et B sont incompatibles si les parties A et B associées vérifient $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 11.9 On reprend l'expérience des exemples précédents. Soit A l'événement "faire un 3 au premier lancer" et B l'événement "faire un 5 au premier lancer".
On vérifie alors facilement que les deux parties A et B associées vérifient $A \cap B = \emptyset$. Les événements A et B sont donc incompatibles.

On récapitule toutes ces notions dans le tableau suivant :

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste	Notation
événement certain	Ensemble entier	Ω
événement impossible	Ensemble vide	$\emptyset$
événement élémentaire	Singleton	$\{\omega\}$
événement A	Ensemble A	$A \subset \Omega$
événement contraire de A	Complémentaire de A	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
A ou B	A union B	$A \cup B$
A et B	A inter B	$A \cap B$
A et B incompatibles	A et B disjoints	$A \cap B = \emptyset$
ω réalise A	ω appartient à A	$\omega \in A$

11.2 Dénombrement

Définition 11.10 Soit E un ensemble non vide. On dit que E est **fini** s'il est composé d'un nombre fini d'éléments $e_1, \dots, e_n$. On dit alors que n est le **cardinal** de E et on note

$$Card(E) = n \qquad ou \qquad |E| = n.$$

Exemple 11.10

- L'ensemble $[\![1;n]\!]$ a pour cardinal n.
- L'ensemble $[\![0;n]\!]$ a pour cardinal $n+1$.
- L'ensemble des cartes d'un jeu de tarot a pour cardinal $(10+4)\times 4+21+1 = 78$.

Remarque : Faire du dénombrement, c'est déterminer le cardinal d'un ensemble, sans avoir à établir la liste des éléments le composant.

Théorème 11.1 (Formule du crible de Poincaré)

- Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors,

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B).$$

- Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors,

$$\begin{aligned} card(A \cup B \cup C) &= card(A) + card(B) + card(C) \\ &\quad - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Remarque : La formule se généralise par récurrence au cas d'une union de n sous-ensembles $A_1, \dots, A_n$ d'un ensemble E. On donne ci-dessous le cas ou les ensembles A_k sont deux à deux disjoints.

Proposition 11.1 Soient $A_1, \ldots, A_n$ des sous-ensembles d'un ensemble fini E, deux à deux disjoints. On a :

$$card(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} card(A_k).$$

Proposition 11.2 Soient E et F deux ensembles finis. Alors,

$$card(E \times F) = card(E) \times card(F).$$

En particulier, si E est un ensemble fini et $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$card(E^n) = card(E)^n.$$

Exemple 11.11 On lance 3 dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Combien y a-t-il d'issues possibles?

On a vu que $\Omega = [\![1;6]\!]^3$. Donc $card(\Omega) = card([\![1;6]\!]^3) = card([\![1;6]\!])^3 = 6^3 = 216$. Il y a donc 216 issues possibles.

Définition 11.11 Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$. On appelle **p-uplet** de E, tout élément de E^p. Autrement dit, c'est un élément de la forme $(x_1, \ldots, x_p)$ avec $x_i \in E$ pour tout $i \in [\![1;p]\!]$.

Attention ! Il faut bien faire la distinction avec un ensemble à n éléments pour lequel l'ordre n'importe pas. Ainsi, $(1;3;2)$ et $(1;2;3)$ sont deux 3-uplets distincts, tandis que $\{1;3;2\}$ et $\{1;2;3\}$ représentent le même ensemble.

Proposition 11.3 Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est n^p.

Démonstration. Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit un p-uplet d'éléments de E. Le p-uplet a p composantes et on a n possibilités pour la valeur de chaque composante, il y a donc bien n^p p-uplets pour un ensemble à n éléments. □

Exemple 11.12 Un code pour rentrer dans un immeuble est une succession de 4 symboles parmi les 10 chiffres et les deux lettres A et B. Combien y a-t-il de codes possibles?

Le code de l'immeuble est un 4-uplet d'un ensemble à 10+2=12 éléments. Il y a donc $12^4 = 20736$ possibilités.

Définition 11.12 Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle **permutation** de E tout n-uplets d'éléments distincts de E.

Exemple 11.13 L'ensemble des permutations de $E = [\![1;3]\!]$ est :

$$\{(1;2;3);(1;3;2);(2;1;3);(2;3;1);(3;1;2);(3;2;1)\}.$$

Remarque : Écrire une permutation d'un ensemble fini E revient à écrire dans un certain ordre tous les éléments de E. Le nombre de permutations d'un ensemble fini E correspond au nombre de classements possibles des éléments de E.

Proposition 11.4 Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

Démonstration. Soit une permutation d'un ensemble à n éléments. C'est un n-uplet qui a donc n composantes.

- Pour la première composante, on a n valeurs possibles.
- Pour la deuxième composante, on a $n-1$ valeurs possibles car elle doit être différente de la première.
- Pour la troisième composante, on a $n-2$ valeurs possibles car elle doit être différente des deux premières.
- ...
- Pour la n-ème composante, on n'a plus qu'un seul choix.

Ainsi le nombre de permutations est donc $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 = n!$. □

Exemple 11.14 Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « MATHS »?

Compter le nombre d'anagrammes du mot « MATHS » revient à compter le nombre de permutations d'un ensemble à 5 éléments. Ainsi il y a $5! = 120$ anagrammes du mot «MATHS».

Théorème 11.2 Soit E un ensemble à n éléments, et $p \in [\![1;n]\!]$. Le nombre de p-uplets d'éléments distincts de E est :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Démonstration. Soit un p-uplet d'un ensemble à n éléments. Il a donc n composantes. On souhaite compter le nombre de p-uplets dont les composantes sont distinctes.

- Pour la première composante, on a n valeurs possibles.
- Pour la deuxième composante, on a $n-1$ valeurs possibles car elle doit être différente de la première.

- Pour la troisième composante, on a $n-2$ valeurs possibles car elle doit être différente des deux premières.
- ...
- Pour la p-ème composante, on $n-(p-1)$ valeurs possibles car elle doit être différentes des $p-1$ premières valeurs.

Ainsi le nombre de permutations est donc $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(p-1))$. Or

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{1 \times 2 \times 2 \times \ldots \times (n-p) \times (n-p+1) \times \ldots \times n}{1 \times 2 \times \ldots \times (n-p)} = (n-p+1) \times \ldots \times n.$$

□

Remarque : On appelle **arrangement**, *défini pour tout entier naturel n et tout entier naturel p inférieur ou égal à n, le nombre de p-uplet d'éléments distincts dans un ensemble de n éléments. Il est noté A_n^p. La proposition précédente peut donc s'écrire :*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 11.15 Un code pour rentrer dans un immeuble est une succession de 4 symboles **distincts** parmi les 10 chiffres et les deux lettres A et B. Combien y a-t-il de codes possibles?

Le code de l'immeuble est un 4-uplet d'éléments distincts d'un ensemble à 12 éléments. Il y a donc $12 \times (12-1) \times (12-2) \times (12-3) = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$ possibilités.

Définition 11.13 Soient n et p dans $\mathbb{N}$. On appelle **coefficient binomial** « p parmi n » le nombre entier naturel noté $\binom{n}{p}$ égal au nombre de sous-ensembles de E de cardinal p.

En pratique, $\binom{n}{p}$ correspond au nombre de façons de choisir p objets dans un ensemble comportant n objets.

Exemple 11.16 Soit $E = \{1;2;3\}$. Les sous-ensembles à 2 éléments de E sont :

$$\{1;2\}, \{1;3\}, \{2;3\}.$$

Ainsi, $\binom{3}{2} = 3$.

Exemple 11.17 Combien y a-t-il de manières de prélever 3 boules dans une urne contenant 7 boules?

Il y a $\binom{7}{3}$ manières de prélever 3 boules dans une urne contenant 7 boules.

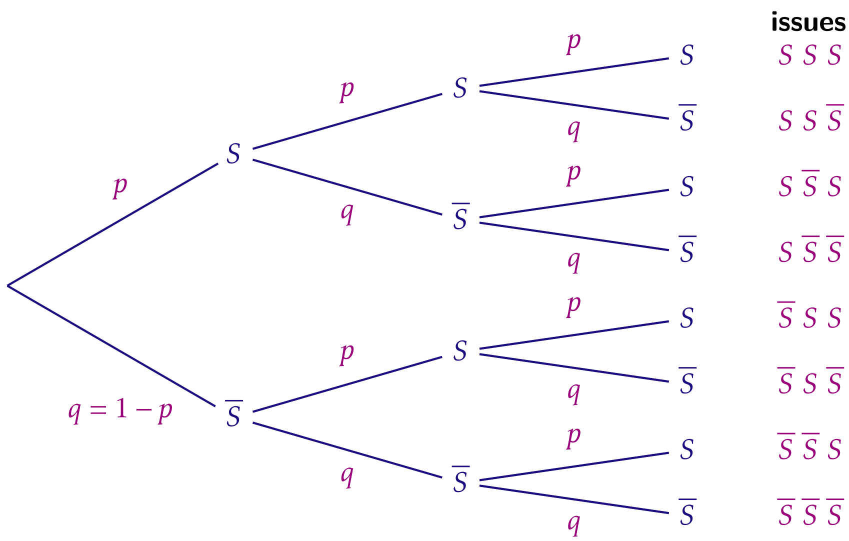
Il est facile de montrer la proposition suivante :

Proposition 11.5 Pour tout entier naturel n, on a :

$$\binom{n}{0} = 1\,, \qquad \binom{n}{1} = n\,, \qquad \binom{n}{n} = 1\,.$$

Proposition 11.6 Soient n et p dans $\mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$. On considère une expérience dont l'issue est soit un succès, soit un échec. Si on répète n fois cette expérience, il y a $\binom{n}{p}$ façons d'obtenir p succès à l'issue de la répétition de ces n expériences. Concrètement, sur un arbre représentant les issues de la répétition de ces n expériences aléatoires, $\binom{n}{p}$ correspond au nombre de chemins réalisant exactement p succès.

Exemple 11.18 Soit une expérience dont l'issue est soit un succès, soit un échec. On la répète trois fois. Les différents résultats de l'expérience peuvent être représentés à l'aide d'un arbre.
En comptant le nombre de chemins, on retrouve les résultats de la Proposition 11.5, à savoir $\binom{3}{1}$=3 et $\binom{3}{3}$=1.



Attention ! Sur ce schéma $p \in [0;1]$, cest une probabilité, ce n'est pas le même p que dans la Proposition 11.6.

Exemple 11.19 Un candidat à un jeu télévisé répond à une série de 4 questions. Pour chaque question, le candidat répond correctement (succès) ou non (échec). On compte le nombre de succès. Combien y a-t-il de séries comportant exactement 2 succès?

Il y a $\binom{4}{2}$ séries avec exactement deux succès.

Proposition 11.7 Soient n et p dans $\mathbb{N}$.

1. si $p \leqslant n$ alors
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}.$$
2. si $p > n$ alors
$$\binom{n}{p} = 0.$$

Exemple 11.20

- Il y a $\binom{7}{3} = 35$ manières de prélever 3 boules dans une urne contenant 7 boules.
- Il y a $\binom{4}{2} = 6$ séries de réponses qui comportent exactement 2 succès.

Proposition 11.8 Soit n dans $\mathbb{N}$ et $p \in [\![0;n]\!]$. Alors:
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \text{et} \quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration. Montrons la première égalité. On a pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \leqslant n$:
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \binom{n}{n-p}.$$
Montrons la deuxième égalité. On a $n \in \mathbb{N}$ et $p \leqslant n$:
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1)!}{p \times (p-1)! \times (n-1-(p-1)} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$
$\square$

Proposition 11.9 **(Triangle de Pascal)** Soient n et p dans $\mathbb{N}$. Alors:
$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Démonstration. On a pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \leqslant n$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!}+\frac{n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!}\\ &= \frac{n!(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

□

<u>Remarque</u> : La formule du triangle de Pascal permet de déterminer les coefficients binomiaux de proche en proche.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

11.3 Probabilités

Dans toute la suite, Ω désigne un ensemble fini et $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω.

Définition 11.14 On appelle **probabilité sur** $\big(\Omega,\mathcal{P}(\Omega)\big)$ toute application

$$P : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ A & \longmapsto & P(A) \end{array}\right.$$

qui à un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ associe un réel $P(A) \in [0,1]$ et qui vérifie les deux propriétés suivantes:

- $P(\Omega) = 1$
- Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

On dit alors que $\big(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P\big)$ est un **espace probabilisé fini**.
Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $P(A)$ est la probabilité de l'événement A.

INTERDIT ! On notera bien qu'une probabilité est à valeurs dans $[0;1]$ et que donc si vous trouvez une probabilité strictement supérieure à 1, c'est que vous vous êtes trompés !!

Exemple 11.21 Soit $\Omega = [\![1;6]\!]$. On définit P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par :

$$\forall k \in \Omega, \qquad P(\{k\}) = \frac{1}{6}.$$

L'application P ainsi définie, est bien une probabilité. Elle modélise la situation classique d'un dé équilibré.

Attention ! L'application P est définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et non sur Ω. Ainsi, si $\omega \in \Omega$, alors $P(\omega)$ n'a pas de sens : il faut écrire $P(\{\omega\})$!

11.3.1 Propriétés de base

Proposition 11.10 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, et A, B deux événements. Alors,

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$.
4. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.

Démonstration.

1. On a $\Omega = A \cup \overline{A}$ avec $A \cap \overline{A} = \emptyset$. Donc, $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$. D'où le résultat.
2. Il suffit d'appliquer le point précédent à $A = \Omega$.
3. Si $A \subset B$, alors $B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ donc $P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geqslant 0} \geqslant P(A)$.
4. $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$. D'où, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.

□

Proposition 11.11 (Formule de Poincaré ou formule du crible) Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé fini, et soient A, B, et C trois événements. Alors:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Démonstration.

- On écrit $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$ avec $A \cap \overline{B}$ et B. On remarque que ces deux événements sont incompatibles. D'où
$$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$
d'où la formule.
- Il suffit d'écrire $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ et d'appliquer ce qui précède.

□

Définition 11.15 On dit que n événements A_1, A_2, ..., A_n sont **deux à deux incompatibles** lorsque pour tous i et j distincts dans $[\![1;n]\!]$, les événements A_i et A_j sont incompatibles.

Exemple 11.22 Trois événements A, B et C sont deux à deux incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$.

Dans ce cadre, la formule de Poincaré est beaucoup plus simple:

Proposition 11.12 Soit $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\right)$ un espace probabilisé fini, et soient A_1, A_2, ..., A_n des événements deux à deux incompatibles. Alors:
$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Exemple 11.23 Si trois événements A, B et C sont deux à deux incompatibles alors $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

11.3.2 Probabilités élémentaires

Théorème 11.3 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement. Si $A = \{\omega_1; \ldots; \omega_n\}$, alors on a:
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}).$$

Exercice 11.1 Un dé est truqué pour que le 6 apparaisse deux fois plus souvent que les autres faces qui, elles, ont toutes la même probabilité de tomber. Calculer $P(\{4;5;6\})$.

Les nombres 1, 2, 3, 4, et 5 ayant la même probabilité de tomber, il existe $\lambda \in [0;1]$ tel que
$$\forall k \in [\![1;5]\!], \qquad P(\{k\}) = \lambda.$$
De plus, le 6 apparaît deux fois plus souvent que les autres faces, donc $P(\{6\}) = 2\lambda$.

Par ailleurs, on a :

$$1 = \sum_{k=1}^{6} P(\{k\}) = 5\lambda + 2\lambda = 7\lambda.$$

D'où, $\lambda = \frac{1}{7}$. On en déduit :

$$P(\{4;5;6\}) = P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \lambda + \lambda + 2\lambda = 4\lambda = \frac{4}{7}.$$

Exercice 11.2 Lors du lancer d'un dé truqué, la probabilité d'obtenir la face i est proportionnelle à i.
Déterminer explicitement la probabilité d'obtenir la face i. Puis calculer $P(\{2,3,6\})$.

Par hypothèse, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que: $\forall i \in [\![1;6]\!] \quad P(\{i\}) = \lambda \times i$.

$$\sum_{i=1}^{6} P(\{i\}) = 1 \iff \sum_{i=1}^{6} \lambda \times i = 1 \iff \lambda \sum_{i=1}^{6} i = 1$$

donc

$$\sum_{i=1}^{6} P(\{i\}) = 1 \iff \lambda \frac{6 \times 7}{2} = 1 \iff \lambda \times 21 = 1 \iff \lambda = \frac{1}{21}.$$

On définira donc bien une probabilité en posant: $\forall i \in [\![1;6]\!] \quad P(\{i\}) = \frac{i}{21}$.
Il est alors facile de calculer la probabilité demandée :

$$P(\{2,3,6\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{6\}) = \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{11}{21}.$$

11.3.3 Le cas de l'équiprobabilité

Définition 11.16 Deux événements A et B sont dits **équiprobables** si ils ont la même probabilité, c'est-à-dire si $P(A) = P(B)$. On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Exemple 11.24 Les situations d'équiprobabilité sont très nombreuses. Citons par exemple le lancer d'une pièce ou d'un dé équilibré, le tirage au hasard d'une boule dans une urne (on dit souvent "indiscernable au toucher" pour supposer l'équiprobabilité), d'une carte dans un jeu, d'une personne dans un échantillon, etc. Il faut cependant bien faire attention à ne pas voir de l'équiprobabilité dans toutes les situations!

<u>Remarque</u> : ***Loto et équiprobabilité***
Le tirage du Loto est un exemple classique d'équiprobabilité: tous les nombres ont absolument la même chance d'être tirés. Par exemple, le tirage $\{1;2;3;4;5;6\}$ *a la même probabilité de sortir que les autres, alors que peu de gens auraient l'idée de jouer ces 6 numéros. De quoi alimenter la célèbre maxime "le loto est un impôt sur les gens qui ne connaissent pas les probabilités" ?*

Théorème 11.4 Soit $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\right)$ un espace probabilisable, où Ω est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique probabilité P prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires. Si on note $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ l'univers des possibles, alors:

$$\forall\, i \in [\![1;n]\!] \qquad P\left(\{\omega_i\}\right) = \frac{1}{card(\Omega)} = \frac{1}{n}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 11.3 avec $\forall i \in [\![1;n]\!] \quad P(\{\omega_i\}) = \lambda$ et d'écrire que $P(\Omega) = 1$. On obtient alors $\lambda = \dfrac{1}{n}$. □

Définition 11.17
- La probabilité P ainsi définie est appelée la **probabilité uniforme** sur Ω.
- Faire l'hypothèse d'équiprobabilité, c'est munir l'espace probabilisable $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\right)$ de la probabilité uniforme P.

Exemple 11.25
- On lance un dé équilibré: on est en situation d'équiprobabilité. Dans ce cas, $\Omega = [\![1;6]\!]$ et $\forall i \in [\![1;6]\!] \quad P\left(\{i\}\right) = \dfrac{1}{6}$.
- On effectue un tirage dans une urne contenant une boule rouge et deux boules vertes. On suppose les boules indiscernables au toucher.

  Dans ce cas, $\Omega = \{R, V\}$ et on a: $P\left(\{R\}\right) = \dfrac{1}{3}$ et $P\left(\{V\}\right) = \dfrac{2}{3}$. On n'est donc pas en situation d'équiprobabilité.
  Astuce pour se ramener à une situation d'équiprobabilité: on distingue les boules vertes en les numérotant V_1 et V_2. Dans ce cas, on obtient le nouvel univers $\Omega' = \{R, V_1, V_2\}$ et on a:

$$P\left(\{R\}\right) = \frac{1}{3} \quad P\left(\{V_1\}\right) = \frac{1}{3} \quad P\left(\{V_2\}\right) = \frac{1}{3}.$$

  On est alors bien en situation d'équiprobabilité.

Attention ! Une même expérience aléatoire peut être modélisée par des univers différents, mais certaines modélisations sont meilleures que d'autres en pratique.

Corollaire 11.1 On suppose que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est en situation d'équiprobabilité. Alors :

1. Pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{n}$ où $n = card(\Omega)$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}.$$

<u>Remarque</u> : Dans le cas d'un espace probabilisé fini en situation d'équiprobabilité, le calcul des probabilités se ramène donc à un calcul de dénombrement. On peut alors utiliser les méthodes vues dans le paragraphe précédent.

11.4 Probabilités conditionnelles

11.4.1 Définitions et propriétés.

Définition 11.18 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, et soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement tel que $P(A) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A le nombre, noté $P_A(B)$, défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

<u>Notations</u> : On rencontre également régulièrement la notation $P(B|A)$ plutôt que $P_A(B)$.

Proposition 11.13 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, et soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement tel que $P(A) \neq 0$. L'application

$$\begin{array}{rccc} P_A & : & \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow & [0;1] \\ & & B & \mapsto & P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{array},$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

<u>Remarque</u> : En particulier, toutes les propriétés de la Partie 11.3 s'appliquent à $B \mapsto P_A(B)$.

Démonstration.

- Vérifions que cette application est bien à valeurs dans $[0;1]$.
  $A \cap B \subset A$ donc $0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant P(A)$ donc $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \in [0;1]$.

- Montrons que $P_A(\Omega) = 1$.

$$P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

- Montrons que pour deux événements incompatibles B et C, $P_A(B \cap C) = P_A(B) + P_A(C)$.
Si $B \cap C = \emptyset$ alors

$$P_A(B \cup C) = \frac{P\big(A \cap (B \cup C)\big)}{P(A)} = \frac{P\big((A \cap B) \cup (A \cap C)\big)}{P(A)}.$$

Comme $A \cap B$ et $A \cap C$ sont incompatibles que l'application P est elle-même une probabilité, on a donc:

$$P_A(B \cup C) = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C).$$

Donc P_A est bien une probabilité sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$. □

Voici une première formule très utile:

Proposition 11.14 Si A et B sont deux événements de probabilité non nulles, alors :

$$P(A \cap B) = P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B).$$

11.4.2 Formules

Formule des probabilités composées

Cas $n = 2$:
Soient A_1 et A_2 deux événements tels que $P(A_1) \neq 0$. Alors:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2).$$

Cas $n = 3$:
Soient A_1, A_2 et A_3 trois événements tels que $P(A_1 \cap A_2) \neq 0$.
Comme $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ on a $P(A_1 \cap A_2) \leqslant P(A_1)$. Donc on a aussi $P(A_1) \neq 0$.
Calculons alors:

$$P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1)P_{A_1}(A_2)}.$$

Ainsi:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3).$$

On peut généraliser la formule précédente au cas de n événements.

Proposition 11.15 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Remarque : $\forall j \in [\![1;n-1]\!]$, on a: $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \cdots \cap A_j$. Ainsi:

$$\forall j \in [\![1;n-1]\!] \quad P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \leqslant P(A_1 \cap \cdots \cap A_j).$$

Comme $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, on a aussi: $\forall j \in [\![1;n-1]\!] \quad P(A_1 \cap \cdots \cap A_j) > 0$. Toutes les probabilités conditionnelles écrites dans la formule précédente ont donc bien un sens.

Exercice 11.3 Considérons une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage constitué de 3 boules blanches?

Notons A_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche". Clairement, on a :

$$P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

$P(A_2)$ est moins évident car on ne connaît pas la composition précise de l'urne lors du deuxième tirage. Cependant, le calcul de $P_{A_1}(A_2)$ est facile :

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

De même,

$$P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Par la formule des probabilités composées, on obtient :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30}.$$

Formule des probabilités totales

Définition 11.19 On dit que les événements A_1, A_2, ..., A_n forment **un système complet d'événements** lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Exemple 11.26 On a les exemples suivants :

- Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\{A ; \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.
- Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, alors $\{\{\omega_1\} ; \dots ; \{\omega_n\}\}$ est un système complet d'événements.

- On lance un dé à 6 faces. On note A l'événement "obtenir un nombre pair" et B l'événement "obtenir un nombre impair". Les ensembles associés sont $A = \{2\,;4\,;6\}$ et $B = \{1\,;3\,;5\}$. Ainsi, $\{A,B\}$ forme un système complet d'événements.

Théorème 11.5 (Formule des probabilités totales) Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $\{A_1,\dots,A_n\}$ un système complet d'événements. Alors, pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k).$$

Si de plus, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P(A_k) \neq 0$, alors :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k).$$

Remarque : Il y a un cas particulier important qui reviendra souvent: Si $0 < P(A) < 1$, *alors* $\{A, \overline{A}\}$ *est un système complet d'événements et:*

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A}).$$

Exercice 11.4 On considère une urne contenant 5 boules vertes et une boule jaune.

- Si on tire une boule verte, on la met de côté et on refait un tirage.
- Si on tire la boule jaune, on la remet dans l'urne et on refait un tirage.

Déterminer la probabilité d'obtenir la boule jaune au deuxième tirage.

Soit J_i: « obtenir la boule jaune au i-ème tirage » et V_i: « obtenir une boule verte au i-ème tirage».
$\{J_1, V_1\}$ est un système complet d'événements de probabilité non nulle. D'après la formule des probabilités totales:

$$P(J_2) = P_{J_1}(J_2)P(J_1) + P_{V_1}(J_2)P(V_1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{36} + \frac{1}{6} = \frac{7}{36}.$$

Exercice 11.5 Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire?

Notons A_i l'évènement "la boule obtenue lors du i-ème tirage est noire".
On introduit un système complet d'événements en considérant les événements :

$$B_1 := A_1 \cap A_2 \quad B_2 := A_1 \cap \overline{A_2}, \quad B_3 := \overline{A_1} \cap A_2, \quad B_4 := \overline{A_1} \cap \overline{A_2}.$$

Par la formule des probabilités totales :

$$P(A_3) = \sum_{k=1}^{4} P_{B_k}(A_3)P(B_k)$$

On calcule facilement :

$$P_{B_1}(A_3) = 0, \quad P_{B_2}(A_3) = P_{B_3}(A_3) = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad P_{B_4}(A_3) = \frac{2}{8}$$

De plus,

$$P(B_2) = P(A_1 \cap \overline{A_2}) = P_{A_1}(\overline{A_2})P(A_1) = \frac{8}{9} \times \frac{1}{5} = \frac{8}{45}.$$

$$P(B_3) = P_{\overline{A_1}}(A_2)P(\overline{A_1}) = \frac{2}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{45}.$$

$$P(B_4) = P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})P(\overline{A_1}) = \frac{7}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{45}.$$

Finalement,

$$P(A_3) = \frac{1}{8} \times \frac{8}{45} + \frac{1}{8} \times \frac{8}{45} + \frac{2}{8} \times \frac{28}{45} = \frac{2}{45} + \frac{7}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}.$$

Théorème 11.6 **(formule de Bayes)** Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors:

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)} = \frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})}$$

Démonstration. On sait que $P(A \cap B) = P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)$, d'où la première égalité. Pour la deuxième égalité, on applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$. □

Remarque : La formule de Bayes se généralise pour $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements. Soit $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements tel que $\forall i \in [\![1;n]\!] \quad P(A_i) \neq 0$.

Soit B un événement de probabilité non nulle. Alors pour tout i dans $[\![1;n]\!]$:

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P_{A_j}(B)P(A_j).}$$

Exercice type 11.1 Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade? Qu'en conclure?

Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. De l'énoncé, on déduit les valeurs suivantes :

$$P(M) = 10^{-4}, \quad P_M(T) = 0,99, \quad P_{\overline{M}}(T) = 10^{-3}.$$

On cherche la probabilité d'être malade sachant que le test est positif *i.e.* $P_T(M)$. Par la formule de Bayes, on a :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P_M(T)P(M)}{P(T)},$$

Il nous faut donc déterminer $P(T)$, par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(T) = P_M(T)P(M) + P_{\overline{M}}(T)P(\overline{M}) = 0.99 \times 10^{-4} + 10^{-3} \times (1 - 10^{-4}) \simeq 1,09910^{-3}.,$$

On en déduit que :

$$P_T(M) = \frac{0.99 \times 10^{-4}}{1.09910^{-3}} \simeq 0.09.$$

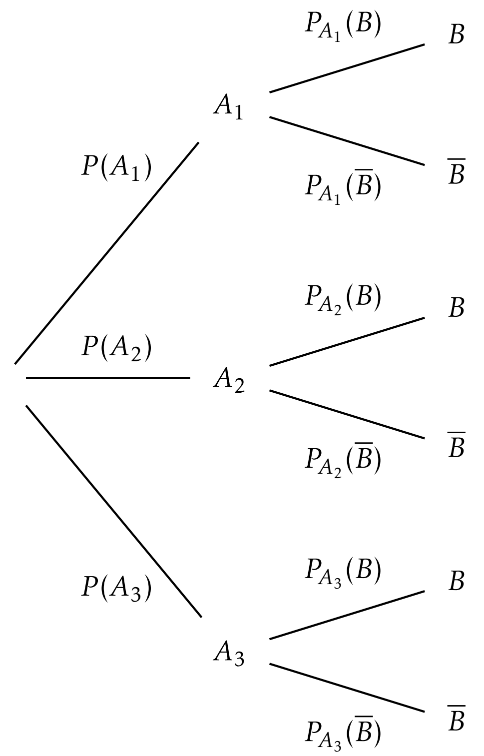
Ce qui fait 9%. La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif! Cela s'explique par le fait que la population de malade est de 1/10000 et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de 1/1000.

11.4.3 Lien avec les arbres pondérés

Il est parfois pratique de représenter une situation de probabilités par un arbre pondéré et de savoir utiliser cet arbre pour faire des calculs de probabilités.
Considérons l'exemple ci-contre dont l'univers associé comporte six issues. L'ensemble

$$\{A_1 \cap B; A_1 \cap \overline{B}; A_2 \cap B; A_2 \cap \overline{B}; A_3 \cap B; A_3 \cap \overline{B}\}$$

forme un *système complet d'événements*.
Le but de ce paragraphe est d'illustrer les propriétés vues précédemment via un certain nombre de "règles" de calcul sur les arbres pondérés.



Règle 1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.
Cette règle illustre notamment le fait que la probabilité conditionnelle est bien une probabilité. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple :

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1,$$
$$P_{A_1}(B) + P_{A_1}(\overline{B}) = 1 \text{ etc .}$$

Règle 2 : La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
Cette règle illustre la formule des probabilités composées. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple :

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1)P_{A_1}(B),$$
$$P(A_2 \cap \overline{B}) = P(A_2)P_{A_2}(\overline{B}) \text{ etc .}$$

Règle 3 : La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.
Cette règle illustre la formule des probabilités totales. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple :

$$P(B) = P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2) + P_{A_3}(B)P(A_3).$$

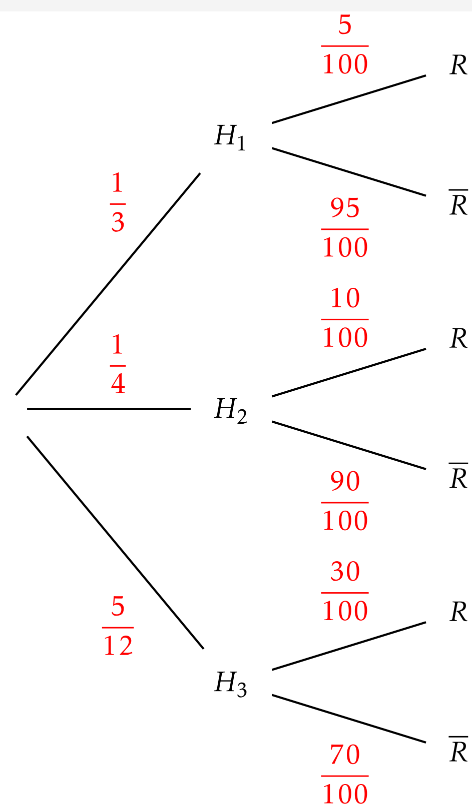
Exercice type 11.2 Un enseignant a beaucoup de mal à se réveiller le matin. Aussi, pour parer à toute éventualité, il programme son réveil à 3 horaires h_1, h_2 et h_3. Il se réveille à l'horaire h_1 avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et à l'horaire h_2 avec une probabilité $\frac{1}{4}$. Lorsqu'il se réveille à l'horaire h_1, la probabilité qu'il arrive à l'heure en classe est de

$\frac{95}{100}$. Lorsqu'il se réveille à l'horaire h_2, la probabilité qu'il arrive en retard en classe est de $\frac{10}{100}$. Enfin, lorsqu'il se réveille à l'horaire h_3, la probabilité qu'il arrive en retard en classe est de $\frac{30}{100}$. Quelle est la probabilité que l'enseignant soit en retard?

Représentons la situation par un arbre pondéré. (Voir ci-dessous).
Notons R l'événement « l'enseignant est en retard en classe » et H_i l'événement « l'enseignant se réveille à l'horaire h_i pour $i \in \{1;2;3\}$ ».
$\{H_1;H_2;H_3\}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales (correspondant à la règle 3), on a :

$$\begin{aligned} P(R) &= \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P_{H_i}(R) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{5}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{10}{100} + \frac{5}{12} \times \frac{30}{100} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

L'enseignant arrive donc en retard avec une probabilité $\frac{1}{6}$.



Attention ! On peut toujours faire un arbre pondéré (au brouillon) mais contrairement aux exigences du bac, il ne suffit plus pour la justification des calculs. Les règles énoncées ci-dessus ne sont finalement qu'une bonne représentation visuelle des propriétés énoncées précédemment.

11.5 Indépendance

11.5.1 Indépendance de deux événements

Définition 11.20 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarque : Il est facile de voir que deux événements A et B sont indépendants si $P_B(A) = P(A)$ ou de manière équivalente si $P_A(B) = P(B)$. Autrement dit, deux événements A et B sont indépendants si la donnée de l'information "A est réalisé" (resp. "B est réalisé") n'influe pas sur la réalisation de B (resp. A). On retrouve donc une notion intuitive d'indépendance.

*Remarque : **Les probabilités et les préjugés des joueurs***
À la roulette, la boule s'arrête au hasard sur un numéro rouge ou un numéro noir. Dans des ouvrages sur la roulette, on lit que la plus longue "série" (c'est-à-dire suite de résultats de même couleur) que l'on ait observée a été de 24 rouges ou de 24 noirs. Beaucoup de joueurs, s'ils observent un jour une série de 24 rouges n'hésitent pas à conclure que le noir doit forcément sortir au coup suivant "puisqu'il n'y a jamais eu de série de 25..." Mais comme l'écrivait le mathématicien Joseph Bertrand (1822-1900), "la roulette n'a ni conscience, ni mémoire..."
Alors, au Loto, les numéros les moins souvent obtenus lors des tirages précédents ont-ils plus de chances de sortir au tirage suivant? Le hasard réserve bien des surprises : par exemple, le numéro 22 n'est sorti comme numéro complémentaire qu'après 344 tirages, c'est-à-dire plus de 6 ans après le premier tirage du Loto (le 19 mai 1976)...
Le "bon sens" devrait suffire à persuader les joueurs que les coups successifs de la roulette, comme les tirages successifs du Loto sont indépendants les uns des autres...

Attention ! La notion d'indépendance dépend de la probabilité P considérée.

Exercice 11.6 On lance un dé à 6 faces. Étudier l'indépendance des événements A: « Obtenir 1 ou 2 » et B: « Obtenir 1 ou 3 » si:

1. Le dé est équilibré et P est la probabilité uniforme sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$.
2. Le dé est truqué et Q est la probabilité sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$ telle que:

$$Q(\{1\}) = Q(\{2\}) = Q(\{3\}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad Q(\{4\}) = Q(\{5\}) = Q(\{6\}) = \frac{1}{12}.$$

Correction:

1. L'événement $A \cap B$ correspond à « obtenir un 1 ». Le dé étant équilibré, on a

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

De plus,

$$P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Ainsi $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$. Les deux événements ne sont pas indépendants.

2. Avec un dé truqué, on a les probabilités suivantes :

$$Q(A \cap B) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad Q(A)Q(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi $Q(A \cap B) = Q(A)Q(B)$ et les deux événements sont donc indépendants.

Attention ! La notion d'indépendance n'est pas forcément intuitive.
Cependant, dans la plupart des cas, elle l'est: il arrive souvent que, compte tenu de l'expérience aléatoire considérée, l'on sache *a priori* que les événements A et B sont indépendants (dans ce cas-là, l'énoncé le précise). On pourra alors utiliser directement la formule $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ dans les calculs.

11.5.2 Indépendance d'une famille d'événements

Définition 11.21 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soient $A_1, \dots, A_n$ des événements.

- On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont **deux à deux indépendants** si :

$$\forall 1 \leqslant i < j \leqslant n, \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

- On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si :

$$\forall I \subset [\![1;n]\!], \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

<u>Remarque</u> : Par définition, des événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse en général.

Exemple 11.27 Avec 4 événements A_1, A_2, A_3 et A_4 : on dit que les événements A_1, A_2, A_3 et A_4 sont mutuellement indépendants lorsque l'on a les 11 égalités :

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_1 \cap A_4) = P(A_1)P(A_4)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_4) = P(A_2)P(A_4)$, $P(A_3 \cap A_4) = P(A_3)P(A_4)$;
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_4)$, $P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_3)P(A_4)$, $P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_2)P(A_3)P(A_4)$;
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$;

Exercice 11.7 On lance 2 dés équilibrés numérotés et on considère les événements:

- A: « Le dé 1 donne un nombre pair »
- B: « Le dé 2 donne un nombre impair »
- C: « La somme des nombres obtenus est paire »

Les événements A, B, C sont-ils deux à deux indépendants? mutuellement indépendants?

Commençons par voir que

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(C) = \frac{6\times 3}{36} = \frac{1}{2}.$$

L'événement $A \cap B$ correspond à « Le dé 1 donne un nombre impair et le dé 2 donne un nombre impair ».
Ainsi $P(A\cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Or $P(A)P(B) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Ainsi $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.
L'événement $A \cap C$ correspond à « les deux dés donnent un nombre pair ».
Ainsi $P(A\cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Or $P(A)P(C) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Ainsi $P(A\cap C) = P(A)P(C)$.
L'événement $B \cap C$ correspond à « les deux dés donnent un nombre impair ».
Ainsi $P(B\cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Or $P(B)P(C) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Ainsi $P(B\cap C) = P(B)P(C)$. Les événements A, B et C sont donc deux à deux indépendants.
Etudions leur indépendance mutuelle.
L'événement $A\cap B\cap C$ est un événement impossible donc $P(A\cap B\cap C) = 0$. Or $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$.
Les événements A, B et C ne sont donc pas mutuellement indépendants.

Théorème 11.7 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements mutuellement indépendants. Soient $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements tels que $\forall i [\![1;n]\!]$, $B_i \in \{A_i\,;\,\overline{A_i}\}$. Alors, les événements $B_1, \dots, B_n$ sont également mutuellement indépendants.

Exemple 11.28 Si A, B C sont mutuellement indépendants alors A, $\overline{B}$, C aussi, ou encore $\overline{A}$, B, C aussi, etc.