10. Limites et continuité

Les mathématiques consistent à prouver une chose évidente par des moyens complexes.

George Polyá

Les notions de limites et de continuité sont fondamentales en analyse. Dans ce chapitre, nous commencerons par introduire de manière rigoureuse les notions de limites de fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, puis nous compléterons les techniques de calcul de limites abordées dans le chapitre sur les suites convergentes. Enfin, nous donnerons la définition rigoureuse d'une fonction continue et nous verrons les propriétés qui en découlent.

10.1 Limites

10.1.1 Limites d'une fonction

Exemple introductif

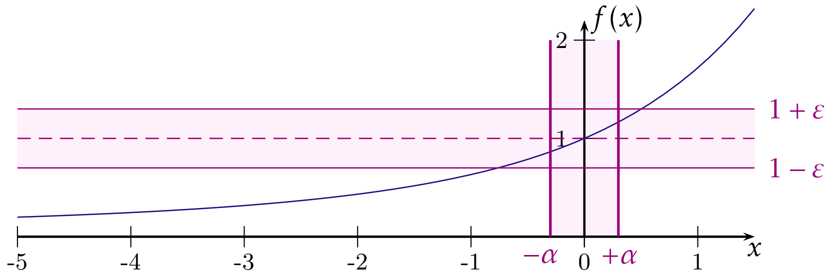
Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On cherche à connaître le comportement de f au voisinage de 0.

Commençons par donner quelques valeurs numériques de $f(x)$ lorsque x est proche de 0 :

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$f(x)$	0.6321	0.7869	0.9516	0.9950	0.9995	1.0005	1.0050	1.0517	1.2974	1.7182

On remarque que, plus x prend des valeurs proches de 0, plus $f(x)$ prend des valeurs proches de 1.

Cela se voit aussi graphiquement : quelle que soit la largeur de la bande horizontale H centrée sur la droite d'équation $y = 1$, il existe une bande verticale V centrée sur la droite d'équation $x = 0$ telle que les points de la représentation graphique de f dont les abscisses sont dans V ont des ordonnées situées dans H.



On dit que la fonction f **a pour limite** 1 en 0 ou que $f(x)$ **tend vers** 1 lorsque x tend vers 0.

Dans toute la suite, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, noté en abrégé intervalle$^{(*)}$.

Limite finie ou infinie en $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition 10.1 Soit I un intervalle$^{(*)}$ de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément de I ou une extrémité de I. Soit f une fonction définie sur I.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en x_0 (ou encore que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0) si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha] \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

- On dit que f admet $+\infty$ pour limite en x_0 (ou encore que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0) si:

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha] \quad f(x) \geqslant A$$

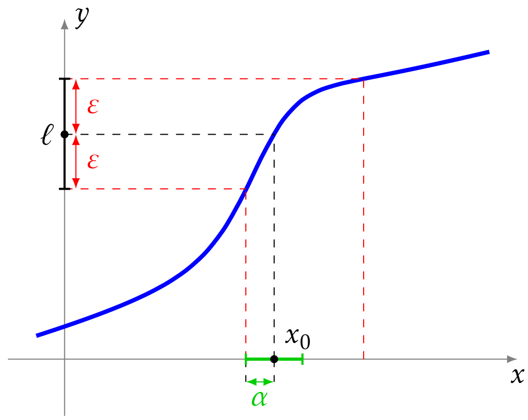
- On dit que f admet $-\infty$ pour limite en x_0 (ou encore que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0) si:

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha] \quad f(x) \leqslant B$$

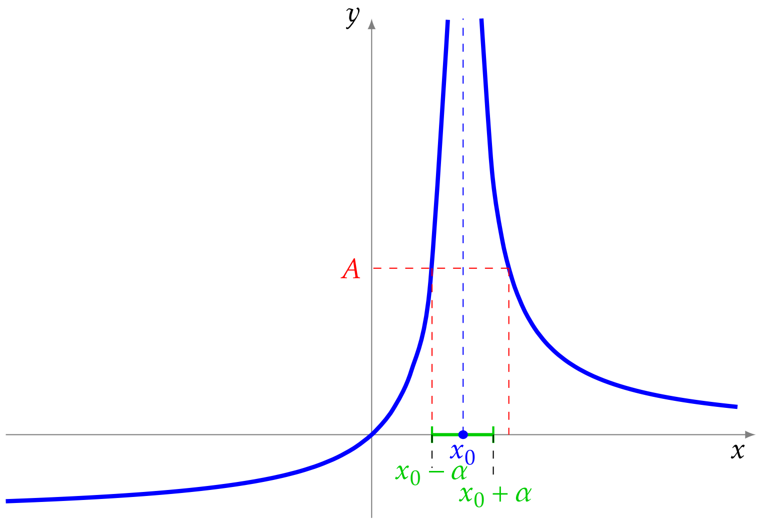
Remarque : Le premier point s'écrit également :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Illustrations graphiques des deux premières définitions:



$f(x)$ est aussi proche de ℓ qu'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de x_0.



$f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de x_0.

Définition 10.2 Si l'une des trois conditions précédentes est vérifiée, on dit que f admet une limite (finie ou infinie selon le cas) en x_0.

Proposition 10.1 Avec les notations précédentes, s'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ vers lequel $f(x)$ tende lorsque x tend vers x_0, alors il est **unique**. Il est appelé la limite de f en x_0 et on le note:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f$$

Démonstration. On démontre le résultat dans le cas où $\ell < +\infty$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f admet deux limites réelles distinctes ℓ et ℓ' en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ et $\alpha' > 0$ tels que pour tout $x \in I$,

$$|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \text{ et } |x - x_0| \leqslant \alpha' \Longrightarrow \left|f(x) - \ell'\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leqslant \min(\alpha, \alpha')$. On trouve par inégalité triangulaire :

$$|\ell - \ell'| = |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \leqslant |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| \leqslant 2\varepsilon$$

En choisissant, $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell - \ell'|$, on obtient $|\ell - \ell'| \leqslant \frac{2}{3}|\ell - \ell'|$ ce qui est absurde. D'où l'unicité. □

Exemple 10.1 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$. Montrons que $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$.

Montrons que:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in [1 - \alpha; 1 + \alpha], \quad |f(x) - 5| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [1 - \alpha; 1 + \alpha]$, $|f(x) - 5| < \varepsilon$.
Tout d'abord, on remarque que :

$$x \in [1 - \alpha; 1 + \alpha] \iff 1 - \alpha \leqslant x \leqslant 1 + \alpha \iff -\alpha \leqslant x - 1 \leqslant \alpha \iff |x - 1| \leqslant \alpha$$

et que

$$|f(x) - 5| = |2x + 3 - 5| = |2x - 2| = 2|x - 1|.$$

Posons $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2}$, on a bien $\forall x \in [1 - \alpha; 1 + \alpha]$, $|f(x) - 5| \leqslant 2 \times \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

<u>Remarque</u> : Par la suite, l'usage des « ε » sera réservé aux exercices théoriques ou très difficiles.

Limite à gauche, à droite en $x_0 \in \mathbb{R}$

Pour certaines fonctions, il peut être utile de distinguer le comportement en un point x_0 selon que l'on s'approche de x_0

- exclusivement par la gauche, *i.e* par valeurs inférieures, *i.e* pour des abscisses $x < x_0$
- exclusivement par la droite, *i.e* par valeurs supérieures, *i.e* pour des abscisses $x > x_0$.

Définition 10.3 Soit I un intervalle(*) de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément de I ou une extrémité de I. Soit f une fonction définie sur I. On dit que f admet une **limite à gauche** en x_0 si elle vérifie les conditions pour une limite, en remplaçant partout $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ par $[x_0 - \alpha; x_0[$. Quand une limite à gauche existe, alors elle est **unique** et on l'appelle la **limite à gauche** en x_0 de f. Elle est notée:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0^-} f$$

Définition 10.4 Soit I un intervalle[(*)] de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément de I ou une extrémité de I. Soit f une fonction définie sur I. On dit que f admet une **limite à droite** en x_0 si elle vérifie les conditions pour une limite, en remplaçant partout $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ par $]x_0; x_0 + \alpha]$. Quand une limite à droite existe, alors elle est **unique** et on l'appelle la **limite à droit**e en x_0 de f. Elle est notée:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0^+} f$$

On peut illustrer les deux définitions précédentes dans le cas d'une limite finie :

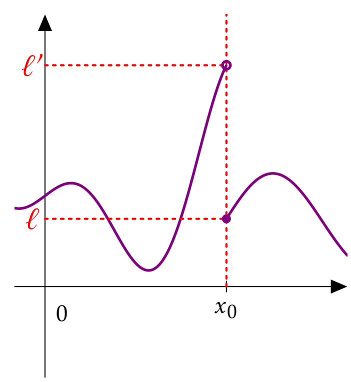
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- si lorsque x se rapproche de x_0 par valeurs inférieures, $f(x)$ se rapproche de ℓ', on dit que f admet ℓ' pour *limite à gauche* en x_0 et on note

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell' \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell'$$

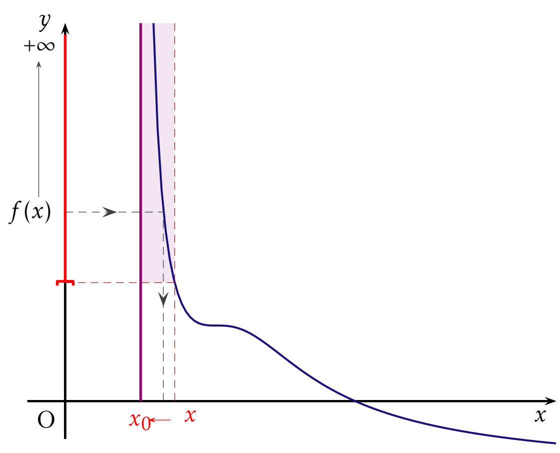
- si lorsque x se rapproche de x_0 par valeurs supérieures, $f(x)$ se rapproche de ℓ, on dit que f admet ℓ pour *limite à droite* en x_0 et on note

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$$



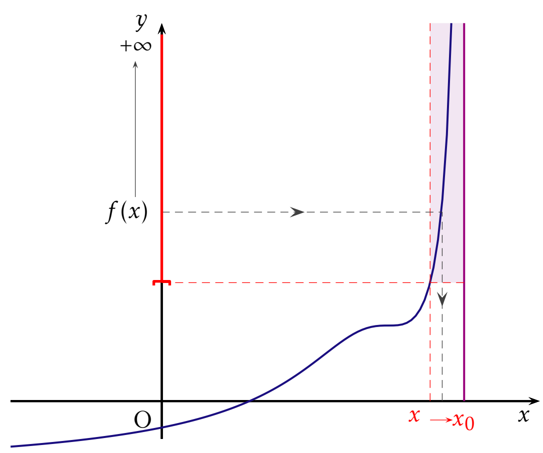
On peut illustrer les deux définitions précédentes dans le cas d'une limite infinie :

Limite « à droite de x_0 »

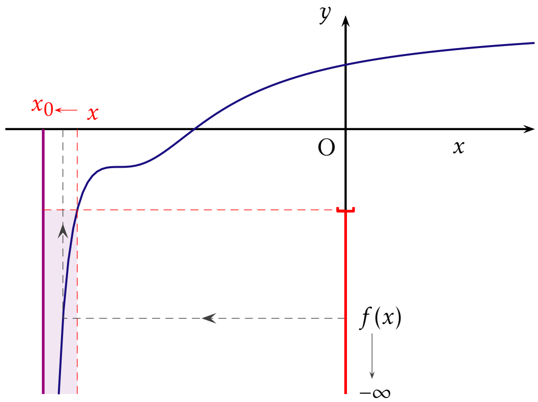


$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$$

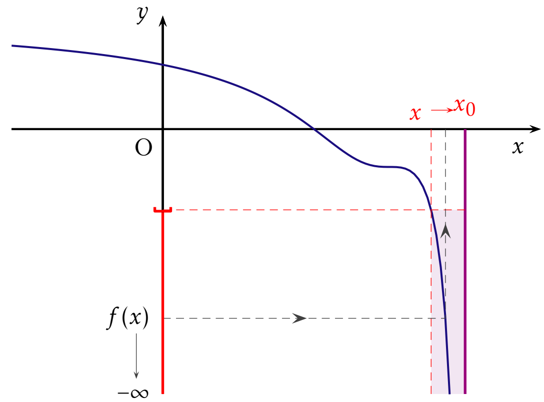
Limite « à gauche de x_0 »



$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$$

Remarque : La notion de limite à gauche (resp. à droite) n'a de sens que si il est possible d'approcher x_0 sous la contrainte $x < x_0$ (resp. $x > x_0$).
Par exemple, étudier la limite à gauche en 0 de la fonction ln n'a pas de sens.

Exemple 10.2 Déterminer les limites à gauche et à droite des fonctions suivantes en x_0:

- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ et $x_0 = 1$

  Commençons par déterminer la limite de f à gauche de 1. On cherche donc vers quoi tend $f(x)$ lorsque $x \longrightarrow 1$ avec $x < 1$.
  Pour $x < 1$ proche de 1, on a $f(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$.
  On cherche ensuite la limite de f à droite de 1. On cherche donc vers quoi tend $f(x)$ lorsque $x \longrightarrow 1$ avec $x > 1$.
  Pour $x > 1$ proche de 1, on a $f(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$.

- $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ et $x_0 = 0$

  Commençons par déterminer la limite de g à gauche de 0. On cherche donc vers quoi tend $g(x)$ lorsque $x \longrightarrow 0$ avec $x < 0$.
  Pour $x < 0$, on a $|x| = -x$ donc $g(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -1$.
  On cherche ensuite la limite de g à droite de 0. On cherche donc vers quoi tend $g(x)$ lorsque $x \longrightarrow 0$ avec $x > 0$.
  Pour $x > 0$, on a $|x| = x$ donc $g(x) = \dfrac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1$.

- $h(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $x_0 = 0$.

  Commençons par déterminer la limite de h à gauche de 0. On cherche donc vers quoi tend $h(x)$ lorsque $x \longrightarrow 0$ avec $x < 0$.
  Pour $x < 0$, on a $h(x) = x^2 + 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = 1$.
  On cherche ensuite la limite de h à droite de 0. On cherche donc vers quoi tend $h(x)$ lorsque $x \longrightarrow 0$ avec $x > 0$.
  Pour $x > 0$, on a $h(x) = e^x$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 1$.

Extension des définitions

Les définitions précédentes se généralisent au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$ au lieu de I: il suffit de remplacer I par $I \setminus \{x_0\}$ partout dans ces définitions.

Proposition 10.2 Soit I un intervalle$^{(*)}$ de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et soit f définie sur I ou sur $I \setminus \{x_0\}$.

1. Si x_0 n'est pas une extrémité de I et si f est définie en x_0, alors f **admet une limite** en x_0 si et seulement si f **admet une limite à gauche et à droite** en x_0 et que ces deux limites sont égales à $f(x_0)$.
2. Si x_0 n'est pas une extrémité de I et si f n'est pas définie en x_0, alors f **admet une limite** en x_0 si et seulement si f **admet une limite à gauche et à droite** en x_0 et que ces deux limites sont égales.
3. Si x_0 est l'extrémité gauche (respectivement droite) de I et si f est définie en x_0, alors f **admet une limite** en x_0 si et seulement si f **admet une limite à droite** (respectivement à gauche) en x_0 et que cette limite est égale à $f(x_0)$.
4. Si x_0 est l'extrémité gauche (respectivement droite) de I et si f n'est pas définie en x_0, alors f **admet une limite** en x_0 si et seulement si f **admet une limite à droite** (respectivement à gauche) en x_0.

Exercice type 10.1

1. Soit f la fonction définie par:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ccc} 2x+3 & \text{si} & x \neq 1 \\ 7 & \text{si} & x = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La fonction f admet-elle une limite en 1^- ? en 1^+ ? en 1 ?

Pour $x \neq 1$, $f(x) = 2x+3$. On en déduit $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 5$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 5$. La fonction f est définie en 1 et on a $f(1) = 7$ ainsi f n'admet pas de limite en 1 car $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq f(1)$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq f(1)$.

2. Soit g la fonction définie par:

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^2-9}{x-3} \end{array} \right.$$

La fonction g admet-elle une limite en 3^- ? en 3^+ ? en 3 ?

On a pour $x \neq 3$, $g(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$. Ainsi

$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = \lim_{x \to 3^+} g(x) = 6.$$

La fonction g admet donc des limites à gauche et à droite de 3 qui sont égales donc elle admet une limite en 3 et $\lim_{x \to 3} g(x) = 6$.

3. Soit h la fonction définie par:

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x-2} \end{array} \right.$$

La fonction h admet-elle une limite en 2^+ ? en 2 ?

Pour $x \geqslant 2$, on a $h(x) = \sqrt{x-2}$. On en déduit la limite à droite de 2:

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = 0.$$

De plus $h(2) = 0 = \lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$ donc la fonction h admet une limite en 2 qui vaut 0.

4. Soit φ la fonction définie par:

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\infty;8[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(8-x) \end{array} \right.$$

La fonction φ admet-elle une limite en 8^- ? en 8 ?

Pour $x < 8$, on a : $\varphi(x) = \ln(8-x)$. Lorsque $x \to 8^-$, on a $8-x \to 0^+$ or $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc

$$\lim_{x\to 8^-} \varphi(x) = -\infty.$$

La fonction φ admet une limite à gauche de 8. Or 8 est l'extremité droite de I et φ n'est pas définie en 8 donc φ admet une limite en 8.

Méthode 10.1 L'étude de la limite de f en un point x_0 à l'aide des limites à gauche et à droite est pertinente si on est dans une des situations suivantes :

- $f(x)$ s'exprime différemment à gauche et à droite de x_0
- f n'est pas définie en x_0

Exercice 10.1 On considère les trois fonctions:

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \right. \qquad v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right. \qquad w : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^2} \end{array} \right.$$

Les fonctions u, v et w admettent-elles une limite en 0 ? Si oui, quelle est la valeur de cette limite ?

- Commençons par étudier la limite en 0 de la fonction u.
  Remarquons d'abord que cette fonction n'est pas définie en 0 et que 0 est une extrémité de son intervalle de définition. Puis, calculons sa limite à droite en 0. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = +\infty$. Elle admet donc une limite à droite en 0. Cette fonction admet bien une limite en 0.

- Etudions la limite en 0 de la fonction v.
  Remarquons d'abord que cette fonction n'est pas définie en 0 et que 0 n'est pas une extrémité de son intervalle de définition. Puis, calculons sa limite à droite en 0 et sa limite à gauche en 0. On a

$$\lim_{x\to 0^+} v(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} v(x) = -\infty.$$

  Les limites à gauche et à droite de 0 n'étant pas égales, la fonction v n'admet pas de limite en 0.

- Etudions la limite en 0 de la fonction w.
  Remarquons d'abord que cette fonction n'est pas définie en 0 et que 0 n'est pas une extrémité de son intervalle de définition. Puis, calculons sa limite à droite en 0 et sa limite à gauche en 0. On a

$$\lim_{x\to 0^+} w(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} w(x) = +\infty.$$

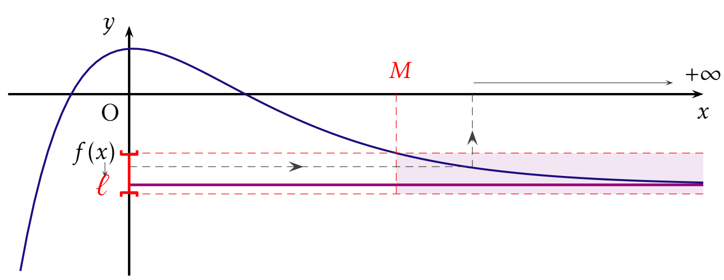
  Les limites à gauche et à droite de 0 étant égales, la fonction w admet bien une limite en 0.

Limite finie à l'infini

Définition 10.5 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'extrémité droite est $+\infty$. Soit f définie sur I. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$) si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap [M;+\infty[\quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, $f(x)$ peut être rendu aussi proche de ℓ que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.



On a une définition similaire pour une limite finie en $-\infty$.

Définition 10.6 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'extrémité gauche est $-\infty$. Soit f définie sur I. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en $-\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$) si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap]-\infty; m] \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, $f(x)$ peut être rendu aussi proche de ℓ que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment petit.

Proposition 10.3 Avec les notations précédentes, s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ vers lequel $f(x)$ tende lorsque x tend vers $\pm\infty$, alors il est unique. Il est appelé la limite de f en $\pm\infty$ et on le note:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\pm\infty} f$$

Exemple 10.3 $\lim_{x \to +\infty} \left(4 + \frac{1}{x}\right) = 4.$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$

Limite infinie en l'infini

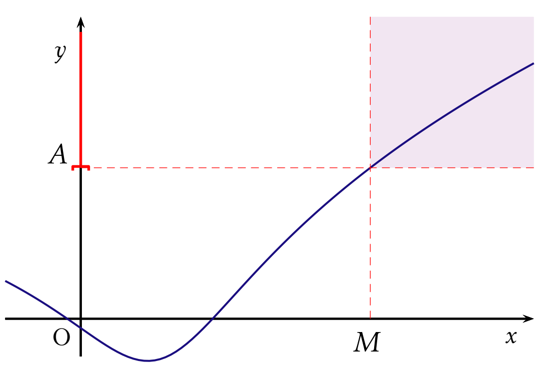
Définition 10.7 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'extrémité droite est $+\infty$. Soit f définie sur I.

- On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$) si:

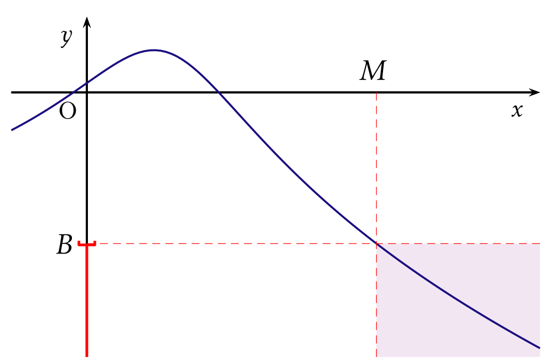
$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap [M; +\infty[\quad f(x) \geqslant A.$$

- On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$) si:

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap [M; +\infty[\quad f(x) \leqslant B.$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

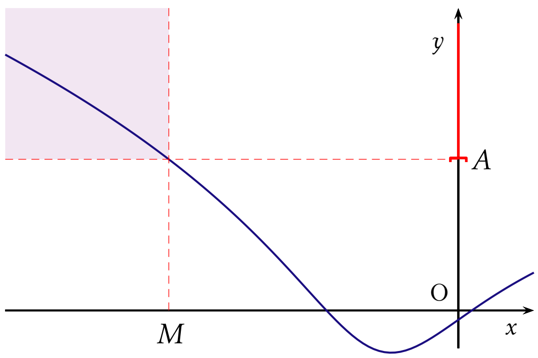
Définition 10.8 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'extrémité gauche est $-\infty$. Soit f définie sur I.

- On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$) si:

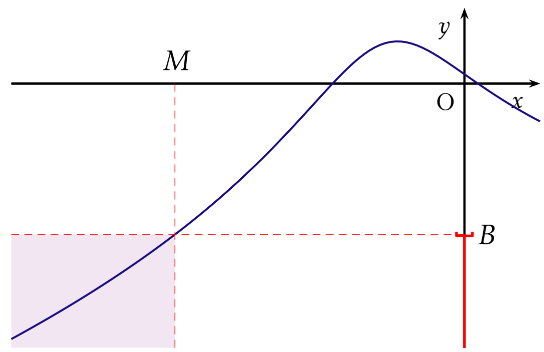
$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap]-\infty; m] \quad f(x) \geqslant A.$$

- On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$) si:

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap]-\infty; m] \quad f(x) \leqslant B.$$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Proposition 10.4 Avec les notations précédentes, s'il existe $\ell \in \{+\infty, -\infty\}$ vers lequel $f(x)$ tende lorsque x tend vers $\pm\infty$, alors il est unique. Il est appelé la limite de f en $\pm\infty$ et on le note:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\pm\infty} f.$$

Limites des fonctions usuelles

Propriété 10.1 (Limites des fonctions puissances ou inverses de puissances)

1. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \quad$ et $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \quad$ et $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

Propriété 10.2 (Fonctions logarithme et exponentielle)

1. La fonction **logarithme** est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et les limites aux bornes de son domaine de définition sont :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

2. La fonction **exponentielle** est définie sur $\mathbb{R}$ et les limites aux bornes de son domaine de définition sont :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

10.1.2 Opérations sur les limites

Opérations algébriques et formes indéterminées

Somme

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Produit

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell\neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$

Inverse

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\ell\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Quotient

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell\neq 0$	0	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$0^\pm$	0	$\pm\infty$	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	FI	$0^\pm$	$\pm\infty$	FI

Formes indéterminées

Il y a 4 formes indéterminées:

- $(+\infty)+(-\infty)$
- $0\times(\pm\infty)$
- $\dfrac{0}{0}$
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Limite d'une fonction composée

Proposition 10.5 Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lambda$ et si $\lim\limits_{X\to\lambda} g(X)=\ell$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=\ell$.

Exemple 10.4 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

On a : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \mathrm{e}^X=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$.

Méthode pour calculer des limites

Méthode 10.2 **(Pour calculer la limite d'une fonction)**

1. On détermine la limite de chacun des termes apparaissant dans l'expression de la fonction.
2. Si on n'obtient pas de **forme indéterminée** :
   On peut alors calculer directement la limite de la fonction à l'aide des opérations sur les limites (en distinguant éventuellement limite à gauche et limite à droite).
3. Si on obtient une **forme indéterminée** :
   On transforme l'expression de la fonction pour lever l'indétermination en factorisant par le terme prépondérant ou en multipliant par la forme conjuguée (si il y a des racines)...
   On calcule ensuite la limite de la fonction à l'aide des opérations sur les limites.

Exemple 10.5 Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2-x+1}$

   Au numérateur, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x=0$.

   Au dénominateur, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x+1)=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2-x+1}=0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x-\ln(x)}$

   Au numérateur, $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{2x}=1$.

   Au dénominateur, $\lim\limits_{x\to 0} x-\ln(x)=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x-\ln(x)}=0$.

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x-2}{x-1}$

   Au numérateur, $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x-2)=-2$.
   Au dénominateur, la fonction n'étant pas définie pour $x=1$, il faut distinguer les limites à gauche et à droite.

On a $\lim_{x\to 1^-} x-1=0^-$ et $\lim_{x\to 1^+} x-1=0^+$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-x-2}{x-1}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x-2}{x-1}=-\infty.$$

Ainsi cette fonction n'admet pas de limite en 1.

4. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln(x)}$

Cette fonction n'est pas définie pour $x=1$. Etudions les limites à gauche et à droite.

On a : $\lim_{x\to 1^-}\ln(x)=0^-$ et $\lim_{x\to 1^+}\ln(x)=0^+$. Ainsi :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\ln(x)}=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\ln(x)}=+\infty.$$

Ainsi cette fonction n'admet pas de limite en 1.

5. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-2}{2x^2+1}$

A priori, c'est une forme indéterminée. Factorisons par le terme dominant :

$$\frac{x^2-2x-2}{2x^2+1}=\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{2x^2\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)}=\frac{1}{2}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{2x^2}}.$$

Sous cette forme, on obtient $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-2}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$.

6. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+4}-x)$

A priori, c'est une forme indéterminée. Multiplions par la quantité conjuguée :

$$(\sqrt{x^2+3x+4}-x)\times\frac{\sqrt{x^2+3x+4}+x}{\sqrt{x^2+3x+4}+x}=\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+3x+4}+x}.$$

Nous sommes toujours face à une forme indéterminée. Au numérateur et au dénominateur, factorisons par le terme dominant :

$$\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+3x+4}+x}=\frac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}=\frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}+1}.$$

On peut alors conclure que :

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+4}-x)=\frac{3}{2}.$$

Pour lever certaines formes indéterminées, il faut connaître le comportement asymptotique des fonctions usuelles les unes par rapport aux autres. C'est ce qu'on appelle la **croissance comparée.**

Propriété 10.3 (Croissance comparée) Pour tous $\alpha, \beta > 0$,

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$

En bref, l'exponentielle l'emporte sur la puissance, qui l'emporte sur le logarithme.

Exemple 10.6 Déterminer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 2x - 1}{x^2 + \ln(x)}$

A priori, il s'agit d'une forme indéterminée. Factorisons par le terme dominant :

$$\frac{e^x + 2x - 1}{x^2 + \ln(x)} = \frac{e^x\left(1 + \frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right)} = \frac{e^x}{x^2}\left(\frac{1 + \frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{\ln(x)}{x^2}}\right).$$

Par croissance comparée, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$ et on sait aussi que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 1.$$

De plus, par croissance comparée, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$$

Par quotient, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1 + \frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{\ln(x)}{x^2}}\right) = 1.$$

Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 2x - 1}{x^2 + \ln(x)} = +\infty.$$

2. $\lim_{x\to 0}(x^2-x)\ln(x)$

   A priori, il s'agit d'une forme indéterminée. Développons :

   $$(x^2-x)\ln(x)=x^2\ln(x)-x\ln(x).$$

   On peut ensuite conclure par croissance comparée et on obtient :

   $$\lim_{x\to 0}(x^2-x)\ln(x)=0.$$

3. $\lim_{x\to+\infty}(x^2+\ln(x))e^{-x}$

   A priori, il s'agit d'une forme indéterminée. Développons :

   $$(x^2+\ln(x))e^{-x}=x^2e^{-x}+\ln(x)e^{-x}.$$

   Par croissance comparée, on a :
   $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)e^{-x}=0$ et $\lim x^2e^{-x}=0$. Ainsi :

   $$\lim_{x\to+\infty}(x^2+\ln(x))e^{-x}=0.$$

10.1.3 Limites et ordre

Dans toute la suite du chapitre:

- $x_0\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$
- D est une partie de $\mathbb{R}$ telle que:
  - si $x_0\in\mathbb{R}$ alors $D=I$ ou $D=I\setminus\{x_0\}$ où I est un intervalle$^{(*)}$ de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de I ou une extrémité de I.
  - si $x_0=+\infty$ alors $\exists\alpha_0\in\mathbb{R}\quad[\alpha_0;+\infty[\subset D$
  - si $x_0=-\infty$ alors $\exists\beta_0\in\mathbb{R}\quad]-\infty;\beta_0]\subset D$

Attention ! L'ensemble D n'est pas nécessairement l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f !

Généralités

Proposition 10.6 Soient f et g deux fonctions définies sur D telles que:

$$\forall x \in D \qquad f(x) \leqslant g(x)$$

On suppose de plus que f et g admettent une limite en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Alors:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Attention ! Si éventuellement $\forall x \in D \quad f(x) < g(x)$, alors l'inégalité portant sur les limites reste large !
Par exemple, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$ et pourtant $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Démonstration. On effectue la preuve dans le cas où $x_0 \in \mathbb{R}$.
Notons $\ell_1 = \displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x)$ et $\ell_2 = \displaystyle\lim_{x \to x_0} g(x)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell_1 > \ell_2$.
La fonction $f - g$ a pour limite $\ell_1 - \ell_2$ en x_0. On pose $\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}$. Notre supposition donne $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in D \cap [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$,

$$|(f-g)(x) - (\ell_1 - \ell_2)| \leqslant \varepsilon,$$

cela s'écrit en particulier :

$$\ell_1 - \ell_2 - \varepsilon \leqslant f(x) - g(x).$$

Or on a posé $\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}$, on a donc :

$$0 < \varepsilon \leqslant f(x) - g(x)$$

soit pour $x \in D \cap [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, $f(x) > g(x)$. Absurde car $\forall x \in D$, $f(x) \leqslant g(x)$. □

Théorème d'encadrement

Théorème 10.1 Soient f, g et h trois fonctions définies sur D telles que:

$$\forall x \in D \qquad f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$

On suppose de plus que f et g admettent une limite finie en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell.$$

Alors la fonction h admet une limite finie en x_0 et $\displaystyle\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$.

Démonstration. Démontrons le résultat dans le cas où $x_0 = +\infty$.
Les fonctions f et g ont pour limite ℓ en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc des réels A et A' tels que, pour tout $x \in D$,

$$x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad x \geqslant A' \Rightarrow |g(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $x \geqslant \max(A, A')$, on a donc $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) \leqslant \ell + \varepsilon$. Ce qui s'écrit également, pour tout $x \in D$,

$$x \geqslant \max(A, A') \Rightarrow |h(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, h admet pour limite ℓ en x_0. □

Remarque : Ce théorème est bien pratique car il fournit à la fois l'existence et la valeur de la limite.

Exemple 10.7 Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x+1}$.

Par définition de la partie entière, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x + 1.$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{x-1}{x+1} \leqslant \frac{\lfloor x \rfloor}{x+1} \leqslant 1.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$, on conclut grâce au théorème d'encadrement que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x+1} = 1.$$

Exercice 10.2 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$.

Théorème de comparaison

Théorème 10.2 Soient f et g deux fonctions définies sur D telles que:

$$\forall x \in D \qquad f(x) \leqslant g(x)$$

- si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
- si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Exemple 10.8 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor$.

Par définition de la partie entière, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \geqslant x - 1$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on en conclut grâce au théorème d'encadrement que :

$$\lim_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty.$$

Cas des fonctions monotones

Théorème 10.3 (de limite monotone) Soit f une fonction **croissante** sur un intervalle $[a;b[$. Alors f admet une limite en b. Plus précisément,

- Si f est majorée sur $[a;b[$, alors f admet une limite finie en b,
- Si f n'est pas majorée sur $[a;b[$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.

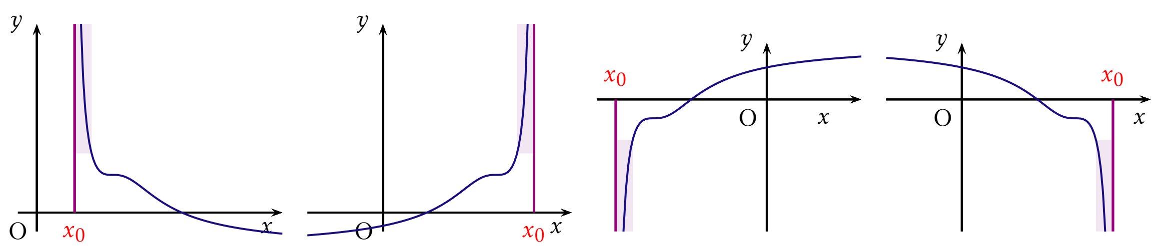
<u>*Remarque*</u> *: On peut adapter ce théorème aux fonctions croissantes ou décroissantes sur des intervalles* $]a;b[$ *ou* $]a;b]$.

10.1.4 Branches infinies

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Une **branche infinie** de $\mathscr{C}_f$ est une portion de $\mathscr{C}_f$ de longueur infinie. On parle donc de branche infinie dès que l'une au moins des deux coordonnées x ou $y = f(x)$ tend vers l'infini.

Limites infinies en $x_0 \in \mathbb{R}$

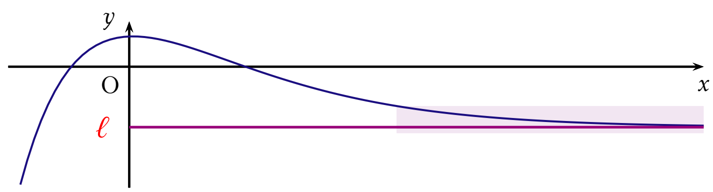
Définition 10.9 Soit x_0 un élément de I ou une extrémité de I. Si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = x_0$ est dite **asymptote verticale à** $\mathscr{C}_f$ au voisinage de x_0.



Exemple 10.9
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_{\ln}$ au voisinage de 0.
- $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x+4}{x-2} = +\infty$ donc la droite verticale d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 2.

Limite finie en $\pm\infty$

Définition 10.10 Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est dite **asymptote horizontale à** $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$.

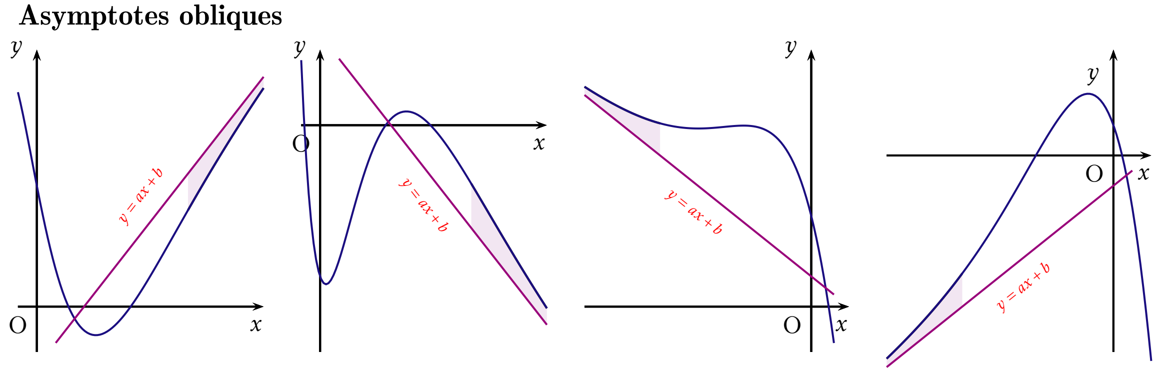


Exemple 10.10
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_{\exp}$ au voisinage de $-\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+4}{x-2} = 3$ donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Limite infinie en $\pm\infty$

Définition 10.11 Soit f une fonction n'ayant pas une limite finie en $+\infty$ (resp. $-\infty$). Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est dite **asymptote oblique** à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Asymptotes obliques



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Exemple 10.11 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x+1+\frac{1}{x^2}$. Admet-elle une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$? de $-\infty$?

On a:

$$f(x) - (2x+1) = \frac{1}{x^2}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(2x+1)) = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x+1)) = 0$. Ainsi la droite d'équation $y = 2x+1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

10.2 Continuité

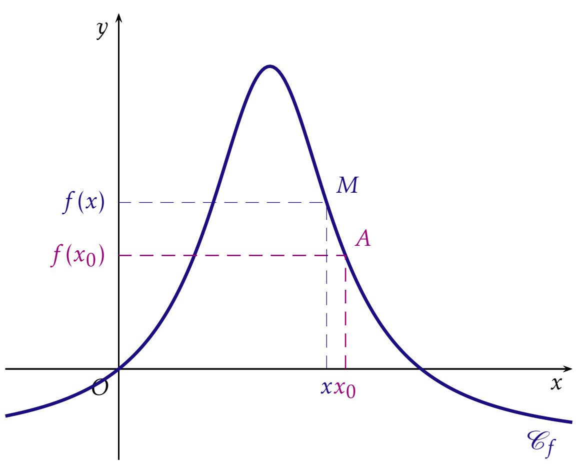
10.2.1 Définitions

Soit I un intervalle$^{(*)}$ de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$, la Proposition 10.2 nous dit que si f est définie en x_0 et que si f admet une limite finie en x_0, alors c'est nécessairement $f(x_0)$.

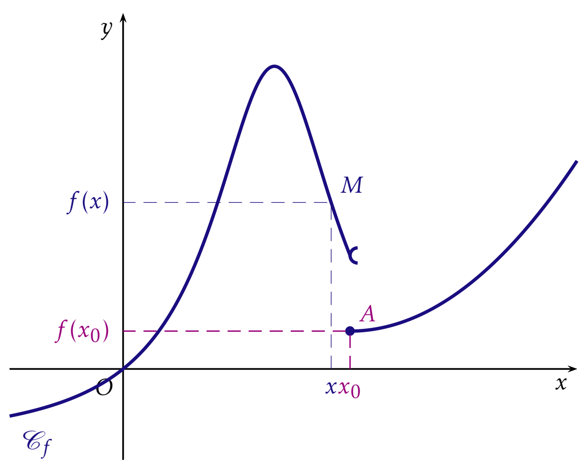
Définition 10.12 Soit I un intervalle$^{(*)}$ de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et soit f définie sur I.
On dit que f est **continue** en x_0 si et seulement si f admet une limite finie en x_0, égale à $f(x_0)$.
Autrement dit: f est continue en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dans le cas contraire, on dit que f est **discontinue** en x_0 ou que x_0 est un point de discontinuité de f.



La fonction f est continue.
Pour tout réel x_0 de I, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(x_0)$ pourvu que x soit suffisamment proche de x_0.



La fonction f n'est pas continue en x_0.
La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse x_0.
Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de x_0.

Méthode 10.3 Pour montrer que f est continue en x_0, il suffit de montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 10.12 Etudier la continuité en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

On a pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$.
De cette égalité, on déduit que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$. Or $f(1) = 1$, ainsi la fonction f n'admet pas de limite en 1 et n'est donc pas continue en 1.

Exemple 10.13 Etudier la continuité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a d'abord $\lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$, puis par composée de limite, on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 0^-} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$. Or $f(0) = 0$ ainsi la fonction f admet une limite en 0 qui vaut $f(0)$ et elle est donc continue en 0.

Définition 10.13 Sous les mêmes hypothèses que précédemment:

- On dit que f est **continue à gauche** en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est **continue à droite** en x_0 si et seulement si f est définie en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Proposition 10.7
1. Si x_0 n'est pas une extrémité de I, alors on a l'équivalence: f continue en x_0 **si et seulement si** f est continue à gauche et à droite en x_0.
2. Si x_0 est l'extrémité gauche (respectivement droite) de I, alors on a l'équivalence: f est continue en x_0 **si et seulement si** f est continue à droite (respectivement à gauche) en x_0.

Méthode 10.4 L'étude de la continuité à gauche ou à droite de f en un point x_0 est pertinente si on est dans une des situations suivantes :

- $f(x)$ s'exprime différemment à gauche et à droite de x_0
- Il y a un dénominateur dans l'expression de $f(x)$ dont la limite en x_0 est nulle.

Exemple 10.14 Etudier la continuité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Etudions dans un premier temps la limite à gauche de 0 de f.
On a $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ puis par composée de limite, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
Etudions dans un second temps la limite à droite de 0 de f.
On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ puis par composée de limite, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$. On conclut par croissance comparée que, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
On a donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et la fonction f n'est pas continue en 0.

Exemple 10.15 Etudier la continuité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Etudions dans un premier temps la limite à gauche de 0 de f.
On a $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$.Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
Etudions dans un second temps la limite à droite de 0 de f.
On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ puis par composée de limite, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$. On conclut par croissance comparée que, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
On a donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ et la fonction f est bien continue en 0.

10.2.2 Prolongement par continuité

Définition 10.14 Soit I un intervalle$^{(*)}$ de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et soit f définie sur $I \setminus \{x_0\}$.
On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 lorsque f admet une limite finie en x_0. Notons cette limite ℓ.
L'application

$$\tilde{f} : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{lll} f(x) & \text{si} & x \neq x_0 \\ \ell & \text{si} & x = x_0 \end{array} \right. \end{cases}$$

est appelée **le prolongement par continuité** de f en x_0.

Remarque :

- *La fonction $\tilde{f}$ est évidemment continue en x_0.*
- *Souvent, on prolonge la fonction f en posant simplement $f(x_0) = \ell$ et on confond la fonction $\tilde{f}$ et la fonction f.*
- *On définit de même la notion de prolongement à gauche et à droite.*

Exemple 10.16 La fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(x) \end{array} \right.$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

On a, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$. Ainsi la fonction g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

Exemple 10.17 La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Comme vu précédemment, on a $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et donc la fonction f n'admet pas de limite finie en 0. Elle n'est donc pas prolongeable par continuité en 0.

10.2.3 Continuité sur un intervalle

Définition 10.15 On dit que f est **continue** sur un intervalle I si f est continue en tout point de I.

Exemple 10.18

1. La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Notations : L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I se note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Remarque : Plus généralement, on dit que f est continue sur un ensemble D si f est continue en tout point de D. Par exemple, la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. On dira que la fonction inverse est continue sur $D = \mathbb{R}^*$.

10.2.4 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 10.8

- Soit λ dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont continues en x_0, alors $f+g$, $f\times g$ et λf sont continues en x_0.
- Si g est continue en x_0 avec $g(x_0)\neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est continue en x_0. Si de plus, f est continue en x_0, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.
- Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors $g\circ f$ est continue en x_0.

Proposition 10.9 (Continuité des fonctions de référence)

Les fonctions **polynômes**, les fonctions **rationnelles**, la fonction **valeur absolue**, la fonction **racine carrée**, les fonctions **logarithmes**, les fonctions **exponentielles**, les fonctions **puissances**, les fonctions **trigonométriques** (cos, sin, tan et arctan) sont toutes continues sur leur domaine de définition.

Remarque : *La fonction* ***partie entière*** *est continue sur tout intervalle* $[n;n+1[$, *avec* $n\in\mathbb{Z}$, *puisqu'elle est constante égale à* n *sur cet intervalle. En revanche, elle est discontinue en tout point* $n\in\mathbb{Z}$ *car:*

$$\lim_{x\to n^-}\lfloor x\rfloor = n-1 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to n^+}\lfloor x\rfloor = n.$$

En résumé, la fonction ***partie entière*** *est continue sur* $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ *mais discontinue en tout point de* $\mathbb{Z}$.

Proposition 10.10 Si f est continue sur un intervalle I et si g est continue sur un intervalle J tel que $f(I)\subset J$.
Alors $g\circ f$ est continue sur I.

Exercice 10.3 Montrer que la fonction $\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \ln(1+x^2)\end{array}\right.$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x\to 1+x^2$ est polynomiale donc définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+1>0$. Ainsi la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x\to\ln(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi par composée de fonctions, la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.4 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\left\{\begin{array}{cl} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ x\ln(x) & \text{si } x>0.\end{array}\right.$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarquons d'abord que la fonction $x \to e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et que la fonction $x \to x\ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Il suffit donc d'étudier la continuité en 0 de la fonction f.

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ donc par composée de fonctions $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$. De plus, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

En résumé :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$

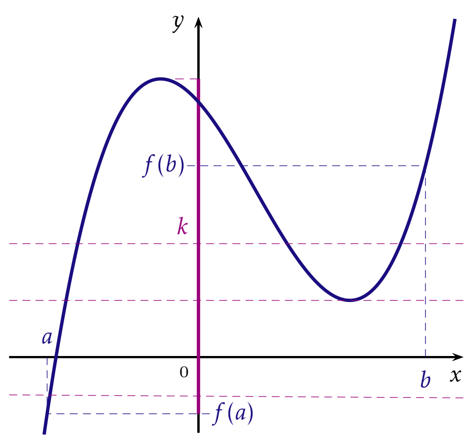
La fonction f est donc continue en 0. Ainsi elle est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

10.2.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 10.4 (des valeurs intermédiaires)

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$. Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet **au moins** une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

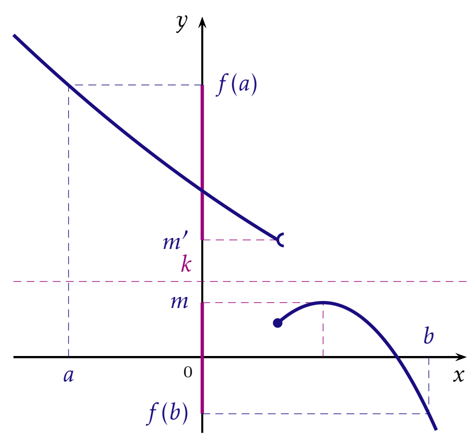
f est continue sur I



L'image de l'intervalle $[a;b]$ est un intervalle.

Tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un élément de $[a;b]$.

f n'est pas continue sur I



L'image de l'intervalle $[a;b]$ n'est pas un intervalle.

Il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ pour lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

Proposition 10.11 L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle: si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Exemple 10.19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Etudier les variations de f.

   On remarque tout d'abord que la fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   Pour déterminer ses variations, commençons par calculer sa dérivée. On a pour $x \in \mathbb{R}$:
   $$f'(x) = \frac{-2x}{1+x^2}.$$
   Pour $x > 0$, on a clairement $f'(x) < 0$ et pour $x < 0$, on a clairement $f'(x) > 0$. De plus $f'(0) = 0$. Calculons les limites en l'infini de f. in a :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
   On déduit alors le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. Déterminer $f(]-1;1])$, $f([0;2])$, $f(]-1;+\infty[)$ et $f(\mathbb{R})$.

   A l'aide du tableau de variations, on détermine :

   - $f(]-1;1]) = \left[\dfrac{1}{2};1\right]$
   - $f([0;2]) = \left[\dfrac{1}{5};1\right]$
   - $f(]-1;+\infty[) =]0;1]$
   - $f(\mathbb{R}) =]0;1]$

Attention ! Comme on vient de le voir dans l'exemple précédent, les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas nécessairement de même nature. C'est par contre le cas lorsque l'intervalle est un **segment** *i.e.* de la forme $[a;b]$ comme on le verra dans la Proposition 10.13.

Proposition 10.12 (Corollaire du TVI) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$.
Si f est continue sur $[a;b]$ telle que $f(a)\times f(b)\leqslant 0$ alors f s'annule au moins une fois sur $[a;b]$.

Exemple 10.20 Montrer que l'équation $\mathrm{e}^x = 2-x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0;1]$.

Poson $f(x)=\mathrm{e}^x+x-2$. Cette fonction est définie et continue sur $[0;1]$. De plus $f(0)=-1$ et $f(1)=\mathrm{e}^1+1-2=\mathrm{e}^1-1>0$. La fonction f est continue sur $[0;1]$, de plus $f(0)\times f(1)<0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette fonction s'annule au moins une fois sur $[0;1]$. Cela revient à dire que l'équation $\mathrm{e}^x=2-x$ admet au moins une solution sur $[0;1]$.

Définition 10.16 Un **segment** est un intervalle fermé borné *i.e.* un intervalle de la forme $[a;b]$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

Proposition 10.13 L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
Si f est continue sur un segment $[a;b]$, alors $f([a;b])=[m;M]$ est un segment. On a de plus :

$$m=\min_{x\in[a;b]} f(x) \quad \text{et} \quad M=\max_{x\in[a;b]} f(x).$$

*Remarque : En particulier, si une fonction f est continue sur un segment alors f y possède un **maximum** et un **minimum**. On dit que f atteint ses bornes.*

10.2.6 Théorème de la bijection

Rappelons la définition d'une fonction bijective et de sa bijection réciproque :

Définition 10.17 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans J. La fonction f est une **bijection** de I dans J lorsque tout élément $y\in J$ possède **un unique antécédent** $x\in I$ par f. Autrement dit :

$$\forall y\in J,\quad \exists! x\in I,\quad y=f(x).$$

Définition 10.18 Soit f une bijection d'un intervalle I dans $J=f(I)$.
On appelle **bijection réciproque** de f la fonction notée f^{-1} définie par :

$$f^{-1}:\left\{\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & I \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y)\end{array}\right.$$

où $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f. Ainsi pour tout $x\in I$ et $y\in J$:

$$y=f(x) \iff f^{-1}(y)=x.$$

Théorème 10.5 **(de la bijection)** Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f **réalise une bijection** de I sur l'intervalle image $J = f(I)$.
La bijection réciproque $f^{-1} : J \longmapsto I$ est elle aussi strictement monotone, de même monotonie que f. De plus, f^{-1} est continue sur J.

Remarque : Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Proposition 10.14 **(Corollaire du Théorème de la bijection)** Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si la fonction f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$. Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet une unique solution dans l'intervalle $[a;b]$.

Démonstration. La fonction f étant continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a;b]$, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[a;b]$ dans $f([a;b] = [f(a);f(b)]$ (resp. $f([a;b]) = [f(b);f(a)]$).
Ainsi pour tout $k \in [f(a);f(b)]$ (resp. $[f(b);f(a)]$), il existe un unique $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.
□

Exercice 10.5 Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2}$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de son ensemble de définition sur un intervalle J à déterminer.
3. On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Préciser les variations de f^{-1} sur J.
4. Pour tout $y \in J$, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x. En déduire l'expression de f^{-1}.
5. Tracer dans un même repère les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

Correction:

1. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On a pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{2} > 0$. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. On a montré que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de plus f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.
3. Sa bijection réciproque f^{-1} est définie de $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$, elle est continue et strictement croissante.

4. Soit $y \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, on a :

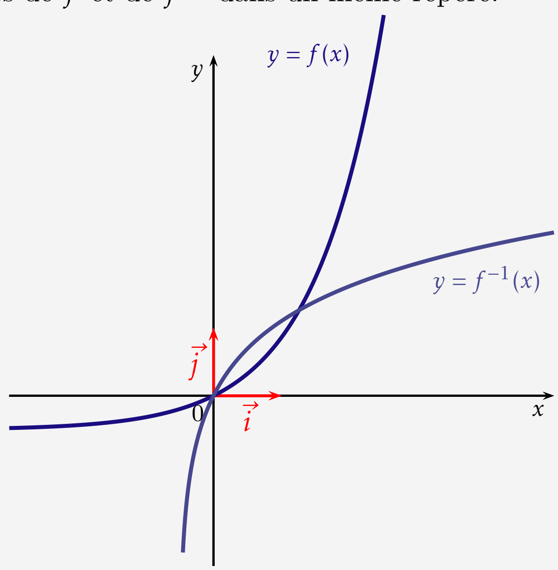
$$f(x) = y \iff \frac{e^x - 1}{2} = y \iff e^x = 2y + 1 \iff x = \ln(2y+1).$$

On en déduit l'expression de f^{-1}:

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln(2y+1) \end{array} \right.$$

Ainsi la fonction f^{-1} est bien strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.
On a également $\lim\limits_{y \to -\frac{1}{2}^+} f^{-1}(y) = -\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} f^{-1}(y) = +\infty$.
La fonction f^{-1} est donc bien un bijection de $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$.

5. Traçons les courbes de f et de f^{-1} dans un même repère:



Exercice 10.6 Montrer que l'équation $x^3 + x = 3$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1;2]$.

Posons $f(x) = x^3 + x$. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $f(1) = 2$ et $f(2) = 10$ donc $3 \in [f(1); f(2)]$. Ainsi d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $c \in [1;2]$ tel que $f(x) = 3$ *i.e.* l'équation $x^3 + x = 3$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1;2]$.