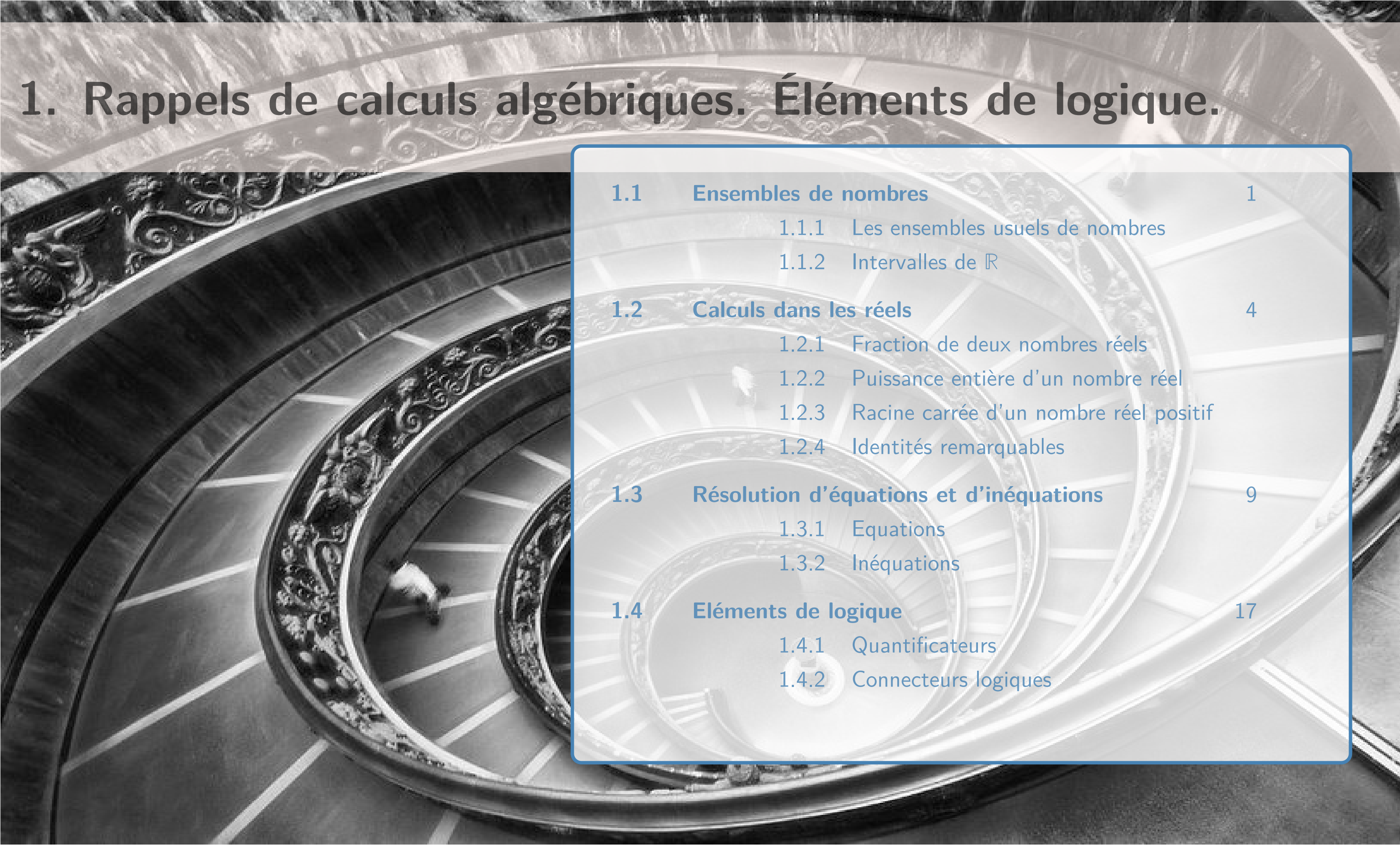


1. Rappels de calculs algébriques. Éléments de logique.

> L'étude des mathématiques est comme le Nil, qui commence en modestie et finit en magnificence.
>
> *Charles Caleb Colton*

Dans ce chapitre sont rappelées les notions et techniques vues au lycée, pour calculer, manipuler des expressions littérales, résoudre des équations ou inéquations...
Dans le dernier paragraphe, nous abordons quelques notions de logique avec l'utilisation des quantificateurs et des connecteurs logiques.

1.1 Ensembles de nombres

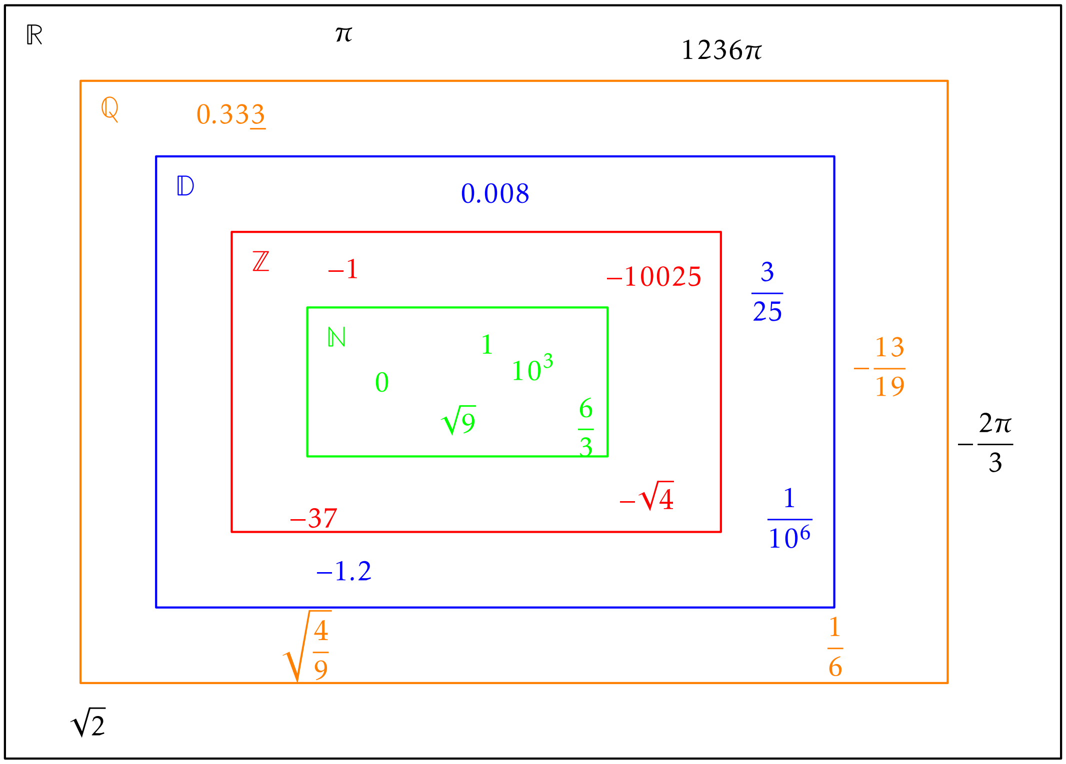
1.1.1 Les ensembles usuels de nombres

Rappelons les notations usuelles des principaux ensembles de nombres :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des *entiers naturels* : 0, 1, 2, ...
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des *entiers relatifs* : ensemble des entiers naturels et de leurs opposés : 0, 1, -1, 2, -2, ...
- $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des *nombres décimaux* : ensemble des nombres qui peuvent s'écrire avec une quantité finie de chiffres après la virgule.
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des *rationnels* : ensemble des quotients $\dfrac{p}{q}$ avec p un entier relatif et q un entier naturel non nul.

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des *réels* : il contient, outre les rationnels, des nombres dits *irrationnels* tels que $\sqrt{2}$, π, ...

Ces ensembles de nombres s'emboîtent de la façon suivante :



<u>*Notations*</u> *:*

- *Les ensembles précédents privés de 0 sont respectivement notés* $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{D}^*$, $\mathbb{Q}^*$ *et* $\mathbb{R}^*$.
- *On note* $\mathbb{R}_+$ *l'ensemble des réels positifs :* $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.
- *On note* $\mathbb{R}_-$ *l'ensemble des réels négatifs :* $\mathbb{R}_- =]-\infty;0] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$.

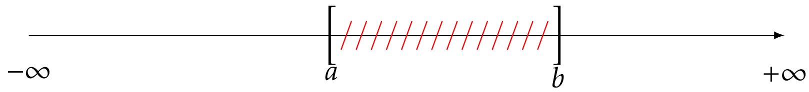
Exemple 1.1 Décrire les ensembles suivants : $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{N}_-$ et $\mathbb{N}_-^*$.

- $\mathbb{Z}_+$ est l'ensemble des entiers relatifs positifs, c'est à dire : $\{0,1,2,3....\}$. On remarque que $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}_-^*$ est l'ensemble des entiers relatifs négatifs privés de 0, c'est à dire $\{-1,-2,-3,...\}$.
- $\mathbb{N}_-$ est l'ensemble des entiers naturels positifs qui sont aussi négatifs, il n'y a donc que 0 dans cet ensemble. On écrit $\mathbb{N}_- = \{0\}$ et on lit $\mathbb{N}_-$ est égal au singleton 0.
- $\mathbb{N}_-^*$ est l'ensemble des entiers naturels positifs qui sont aussi négatifs, privé de 0, il n'y a donc aucun élément dans cet ensemble. On écrit $\mathbb{N}_-^* = \emptyset$ et on lit $\mathbb{N}_-^*$ est égal à l'ensemble vide.

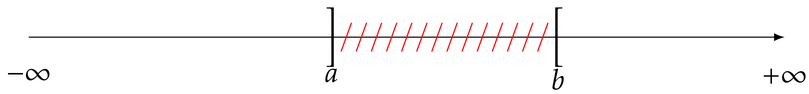
1.1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$, on introduit différents ensembles de nombres appelés *intervalles* de $\mathbb{R}$:

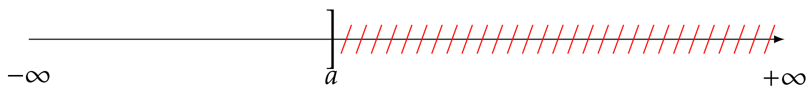
- *segments* ou *intervalles fermés* : $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;



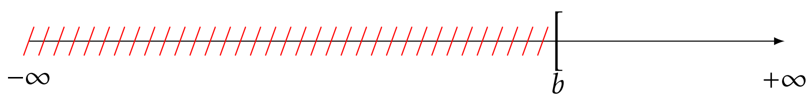
- *intervalles ouverts* : $]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



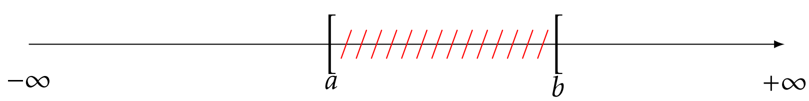
  $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



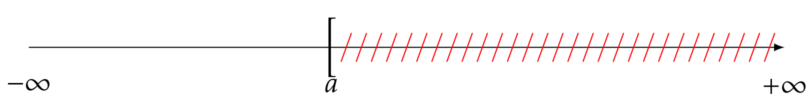
  et $]-\infty;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$;



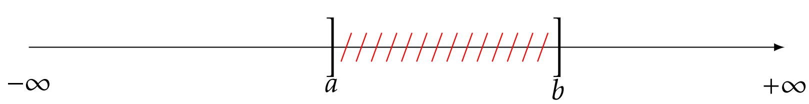
- *intervalles semi-ouverts à droite* : $[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$



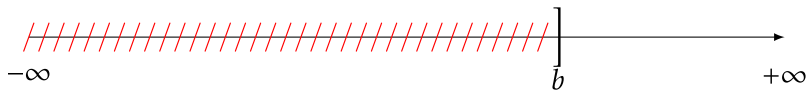
  et $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$;



- *intervalles semi-ouverts à gauche* : $]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$



et $]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$



Remarque : On peut aussi être amené à considérer des intervalles d'entiers. Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leqslant b$, on note $[\![a; b]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre a et b :

$$[\![a; b]\!] = \{n \in \mathbb{Z}\,;\, a \leqslant n \leqslant b\}$$

Par exemple, $[\![0; 2]\!] = \{0; 1; 2\}$.

1.2 Calculs dans les réels

1.2.1 Fraction de deux nombres réels

Définition 1.1 Lorsque $b \neq 0$, le réel $\frac{a}{b}$, défini par $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, est le *quotient* de a par b.
Le réel a est le *numérateur* et le réel b est le *dénominateur* de la fraction $\frac{a}{b}$.

INTERDIT !

$$\frac{a}{0} \text{ n'a AUCUN sens !}$$

Remarque : Par définition, « diviser » par b revient donc à « multiplier par son inverse » $\frac{1}{b}$.

Propriété 1.1 (Rège de simplification de fractions) Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$.
Si c est réel non nul, alors :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}.$$

Exemple 1.2 $A = \dfrac{32}{60} = \dfrac{\cancel{2} \times 16}{\cancel{2} \times 30} = \dfrac{16}{30} = \dfrac{\cancel{2} \times 8}{\cancel{2} \times 15} = \dfrac{8}{15}$.

Attention ! Cela ne fonctionne pas avec les additions $\dfrac{c+a}{c+b} \neq \dfrac{a}{b}$ en général. Par exemple $\dfrac{2+7}{2+9} = \dfrac{9}{11}$ est différent de $\dfrac{7}{9}$.

Propriété 1.2 (Opérations sur les fractions) Soient a, b, c, d des réels tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

- Pour $a \neq 0$, $\dfrac{0}{a} = 0$ et pour tout a, $\dfrac{a}{1} = a$,
- $\dfrac{a}{-1} = -a$ et $\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$,
- **Addition de fractions**
$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$
Pour additionner (ou soustraire) des fractions, on ajoute (ou soustrait) leurs numérateurs APRÈS les avoir mis au même dénominateur.
- **Multiplication de fractions**
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$
- **Division de fractions**
$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$
Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Exemple 1.3 Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible :

- $A = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3 \times 5}{4 \times 5} - \dfrac{2 \times 4}{5 \times 4} = \dfrac{15}{20} - \dfrac{8}{20} = \dfrac{15-8}{20} = \dfrac{7}{20}$.
- $B = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{3 \times 2}{4 \times 5} = \dfrac{3 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 2 \times 5} = \dfrac{3}{10}$.
- $C = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{3 \times 5}{4 \times 2} = \dfrac{15}{8}$.

Remarque :

- *Pour multiplier deux fractions, il est hors de propos de les réduire au même dénominateur.*
- *Au fur et à mesure des calculs de fractions, on cherchera à simplifier les fractions en présence (à l'aide de la seule règle 1.1), afin d'alléger au maximum ses calculs.*
- *Les résultats seront toujours donnés sous forme de fraction irréductible.*

1.2.2 Puissance entière d'un nombre réel

Définition 1.2 Soit n un entier naturel non nul et a un réel.

- Le réel noté a^n (lire « a puissance n ») est le produit de n facteurs tous égaux à a, *i.e*

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

- Si a est non nul, on a :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Par convention, $a^0 = 1$

Exemple 1.4

- $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.
- $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.

Propriété 1.3 **(Règles de calcul)** Pour tous réels a et b et tous entiers relatifs m et n, on a :

$$a^1 = a \qquad a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Démonstration. Démontrons deux de ces règles afin de bien percevoir leur évidence.

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m+n \text{ facteurs}} = a^{m+n}.$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}.$$

□

Attention ! Pour un entier n négatif, l'écriture a^n n'a de sens que lorsque a est non nul. Autrement dit, l'écriture a^n peut implicitement contenir un « dénominateur » si la puissance n s'avère négative. Par exemple, l'écriture a^{-12} n'a de sens que lorsque a est non nul, puisque la puissance $n = -12$ est négative.

Exemple 1.5 Calculer les nombres suivants :

- $A = 2^2 \times 2^{-4} \times 2 = 2^{2-4} \times 2^1 = 2^{-2+1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.
- $B = \frac{3^8}{3^7} = 3^{8-7} = 3^1 = 3$.

- $C = \dfrac{(5^4)^3}{5^{11}} = \dfrac{5^{4\times 3}}{5^{11}} = \dfrac{5^{12}}{5^{11}} = 5^{12-11} = 5^1 = 5.$

1.2.3 Racine carrée d'un nombre réel positif

Définition 1.3 Soit a un réel positif ou nul. On appelle **racine carrée** de a, l'unique réel positif (ou nul) x solution de l'équation $x^2 = a$. On le note $x = \sqrt{a}$.

Exemple 1.6 On pourra retenir les valeurs remarquables suivantes :

$$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{36} = 6, \quad \sqrt{49} = 7...$$

Propriété 1.4 Soient a et b deux réels **positifs**, on a :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \qquad \sqrt{a^2} = a, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{si} \quad b \neq 0.$$

INTERDIT ! $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en général. Par exemple, si on choisit $a = 9$ et $b = 16$, on a :

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ mais } \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

Remarque : Il n'est pas inutile de remarquer que les règles de calcul pour la racine carrée et les puissances sont analogues pour la multiplication et la division :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad vs \qquad (ab)^n = a^n b^n \qquad et \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad vs \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Définition 1.4 Soit a un réel et b un réel positif. On dit que $a - \sqrt{b}$ et $a + \sqrt{b}$ sont des **quantités conjuguées** l'une de l'autre.

Exemple 1.7
- La quantité conjuguée de $2 + \sqrt{3}$ est $2 - \sqrt{3}$.
- La quantité conjuguée de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.
- La quantité conjuguée de $\sqrt{5} - \sqrt{7}$ est $\sqrt{5} + \sqrt{7}$.

Méthode 1.1 (Pour simplifier des fractions contenant des racines carrées) Selon les cas :

- Premier cas : Expression de la forme $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ avec a un réel et b un entier.

Pour faire disparaître la racine carrée, on multiplie par $\sqrt{b}$ au numérateur et au dénominateur.

- Deuxième cas : Expressions de la forme $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$ ou $\dfrac{1}{a-\sqrt{b}}$ avec a un réel et b un entier.
  Pour faire disparaître les racine carrées, on multiplie la fraction au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée.

Exemple 1.8

- Premier cas : Soit $A = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
- Deuxième cas : Soit

$$
\begin{aligned}
B = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\times(\sqrt{2}-\sqrt{3})} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

1.2.4 Identités remarquables

Les deux transformations élémentaires du calcul littéral sont le *développement* et la *factorisation*. Elles doivent absolument être maîtrisées. Rappelons que

- « *Développer* une expression consiste à transformer un produit en une somme »
- « *Factoriser* une expression consiste à transformer une somme en produit ».

Les calculs peuvent être raccourcis en utilisant les identités remarquables rappelées ci-dessous.

Propriété 1.5 Soient a et b deux réels. On a :

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Exemple 1.9 Développer les expressions suivantes :

- $A = (2x-1)^2 = (2x)^2 - 2\times 2x \times 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1.$
- $B = (a-2)(3a+1) = a\times 3a + a\times 1 + (-2)\times 3a + (-2)\times 1 = 3a^2 + a - 6a - 2 = 3a^2 - 5a - 2.$
- $\begin{aligned} C &= (2y-1)(2y+1)(y+2) = ((2y)^2 - 1^2)(y+2) = (4y^2-1)(y+2) \\ &= 4y^2\times y + 4y^2\times 2 + (-1)\times y + (-1)\times 2 = 4y^3 + 8y^2 - y - 2. \end{aligned}$

Exemple 1.10 Factoriser les expressions suivantes :

- $A = 4x^3 - 2x^2 + 8x = 2x(2x^2 - x + 4)$.
- $$\begin{aligned} B &= (5x-2)(x-1)-(4x-3)(5x-2) = (5x-2)[(x-1)-(4x-3)] \\ &= (5x-2)[x-1-4x+3) = (5x-2)(-3x+2). \end{aligned}$$
- $C = 81x^4 - 16 = (9x^2)^2 - 4^2 = (9x^2-4)(9x^2+4)$.

1.3 Résolution d'équations et d'inéquations

Méthode 1.2 (Résolution d'(in)équations) Pour résoudre une équation ou inéquation :

1. On détermine l'ensemble de définition.
2. On résout l'(in)équation.
3. On vérifie que les solutions trouvées sont bien dans l'ensemble de définition.
4. On n'oublie pas de conclure.

Remarque :

1. *Pour les (in)équations compliquées, se ramener au cas où un membre est nul et factoriser, puis utiliser la propriété du produit nul ou dresser un tableau de signes.*
2. *Vérifier que les valeurs trouvées sont effectivement des solutions de l'(in)équation de départ est toujours une bonne idée !*

1.3.1 Equations

Equations du premier degré

Propriété 1.6 Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. L'équation $ax + b = 0$ admet pour unique solution :

$$x = \frac{-b}{a}.$$

Exemple 1.11 Résoudre l'équation (E) : $3x + 1 = 0$.

1. **Ensemble de définition de (E) :** $D_{(E)} = \mathbb{R}$
2. **Résolution :** Soit $x \in D_{(E)}$, $3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.
3. **Conclusion :** $\mathscr{S} = \{-\frac{1}{3}\}$.

4. **Vérification :** $3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -1 + 1 = 0.$

Théorème 1.1 Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas sont possibles :

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution réelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on a la factorisation $ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  et on a la factorisation $ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple 1.12 Résoudre l'équation (E) : $2x^2 + x - 6 = 0$.

1. **Ensemble de définition de (E) :** $D_{(E)} = \mathbb{R}$
2. **Résolution :** Le discriminant Δ vaut :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49 > 0.$$

   L'équation possdède donc deux racines distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 7}{2 \times 2} = \frac{-8}{4} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 7}{2 \times 2} = \frac{3}{2}.$$

3. **Conclusion :** $\mathscr{S} = \{-2; \frac{3}{2}\}$.
4. **Vérification :** $2 \times (-2)^2 + (-2) - 6 = 8 - 8 = 0$. De même pour $\frac{3}{2}$.

Equations avec un quotient

Théorème 1.2 Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul :

$$\text{Si } B \neq 0, \qquad \frac{A}{B} = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Exemple 1.13 Résoudre l'équation $\dfrac{x+3}{\sqrt{2}} = 0$.

Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$. On a $\dfrac{x+3}{\sqrt{2}} = 0$ si et seulement si $x+3=0$ ssi $x=-3$. Ainsi $\mathscr{S} = \{-3\}$.

Méthode 1.3 (Résolution d'un équation quotient) Avant de résoudre une équation quotient, on doit chercher les valeurs pour lesquelles le **dénominateur** s'annule. On appelle ces valeurs des « valeurs interdites ». On cherche ensuite les valeurs pour lesquelles le **numérateur** s'annule et on vérifie que les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

Exemple 1.14 Résoudre l'équation (E) : $\dfrac{x^2-x}{x} = 0$.

1. **Ensemble de définition de (E) :** Pour que l'équation soit bien définie, il faut que $x \neq 0$. D'où $D_{(E)} = \mathbb{R}^*$.
2. **Résolution de l'équation :** Soit $x \in D_{(E)}$.

$$\begin{aligned} & \frac{x^2-x}{x} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - x = 0 \textit{ car une fraction est nulle ssi son numérateur est nul} \\ \Leftrightarrow \quad & x(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

3. **Conclusion :** Attention, ici il est important de vérifier que les solutions appartiennent au domaine de définition de l'équation (E). On a $1 \in D_{(E)}$ mais $0 \notin D_{(E)}$. D'où $\mathscr{S} = \{1\}$.
4. **Vérification :**

$$\frac{1^2-1}{1} = 0.$$

<u>Remarque</u> : Il est parfois nécessaire de faire quelques calculs avant de se ramener à une équation quotient. Ainsi, si une equation contient plusieurs fractions rationnelles, on commence par réunir tous les termes dans un seul membre de l'équation et on met toutes les fractions au même dénominateur pour pouvoir les additionner et obtenir une seule fraction rationnelle.

Exemple 1.15 Résoudre l'équation (E) : $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{2}{x}=-3$.

1. **Ensemble de définition de (E) :** Pour que l'équation soit bien définie, il faut que $x+2\neq 0$ et $x\neq 0$, c'est à dire que $x\neq -2$ et $x\neq 0$ (afin que l'on ne divise pas par 0). D'où $D_{(E)}=\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$.

2. **Résolution de l'équation :** Soit $x\in D_{(E)}$.
   On regroupe tout d'abord l'ensemble des termes dans un même membre et puis on met au même dénominateur.

$$
\begin{aligned}
& \frac{x}{x+2}+\frac{2}{x}=-3 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x}{x+2}+\frac{2}{x}+3=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x^2}{x(x+2)}+\frac{2(x+2)}{x(x+2)}+\frac{3x(x+2)}{x(x+2)}=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x^2+2x+4+3x^2+6x}{x(x+2)}=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{4x^2+8x+4}{x(x+2)}=0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4x^2+8x+4=0 \text{ \textit{car une fraction est nulle ssi son numérateur est nul}} \\
\Leftrightarrow\quad & 4(x^2+2x+1)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2+2x+1=0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x+1)^2=0 \text{ \textit{en reconnaissant une identité remarquable ou en calculant} } \Delta \\
\Leftrightarrow\quad & x+1=0 \\
\Leftrightarrow\quad & x=-1.
\end{aligned}
$$

3. **Conclusion :** Attention, ici il est important de vérifier que les solutions appartiennent au domaine de définition de l'équation (E). On a $-1\in D_{(E)}$. D'où $\mathscr{S}=\{-1\}$.

4. **Vérification :**

$$\frac{-1}{-1+2}+\frac{2}{-1}=-3.$$

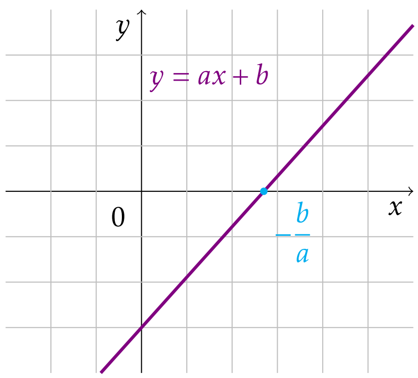
1.3.2 Inéquations

Inéquations du premier degré

L'expression $ax+b$ change de signe au point où elle s'annule. On a alors deux tableaux de signe, selon le signe de a :

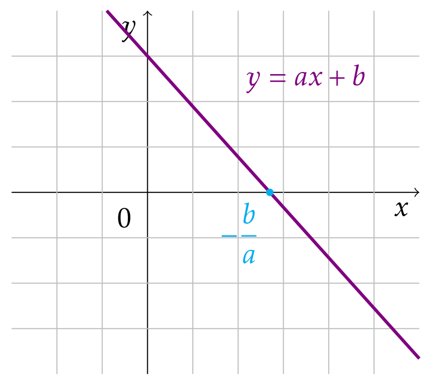
Cas $a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $\boxed{a}x+b$		$-$	0	$+$	



Cas $a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $\boxed{a}x+b$		$+$	0	$-$	



<u>Remarque</u> : Plutôt que d'apprendre par coeur ces résultats, il est vivement conseillé de savoir retrouver les résultats précédents à partir de la résolution de l'inéquation $ax+b \geqslant 0$ (par exemple) ou de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto ax+b$.

Exemple 1.16 Résoudre l'inéquation (I) : $-3x+1 \leqslant 0$.

1. **Ensemble de définition de (I) :** $D_{(I)} = \mathbb{R}$.
2. **Résolution :** Soit $x \in D_{(I)}$,
$$-3x+1 \leqslant 0 \Leftrightarrow -3x \leqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{-1}{-3} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{3}.$$
3. **Conclusion :** $\mathscr{S} = D_{(I)} \cap \left[\frac{1}{3};+\infty\right[= \left[\frac{1}{3};+\infty\right[$.

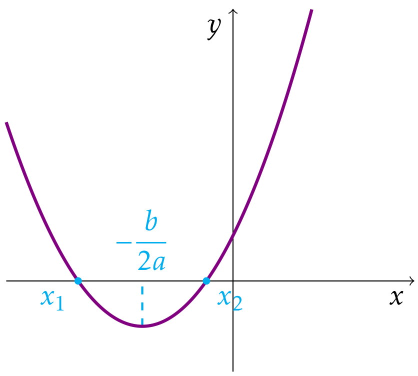
Inéquations du second degré

Le signe du trinôme ax^2+bx+c dépend du signe de a et du signe du discriminant Δ. Dès lors, il y a 6 cas :

- Si $\Delta > 0$, on note x_1 et x_2 les racines de sorte que $x_1 < x_2$ et on obtient les tableaux de signe et représentations graphiques suivants :

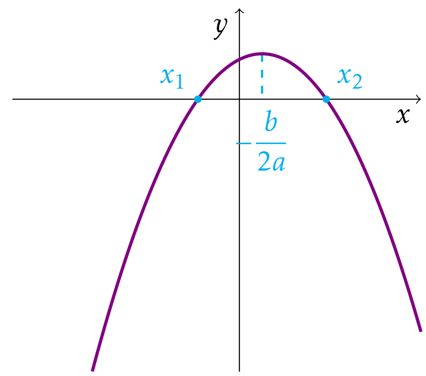
Cas $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$+$	0	$-$	0	$+$	



Cas $a < 0$

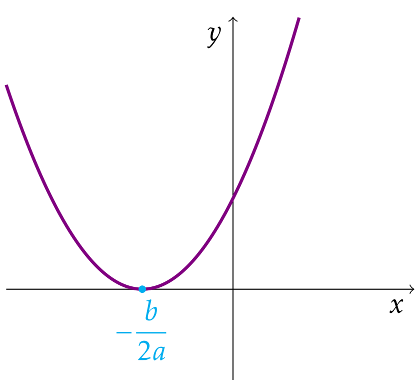
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$-$	0	$+$	0	$-$	



- Si $\Delta = 0$, on note x_0 la racine et on obtient les tableaux de signe et représentations graphiques suivants :

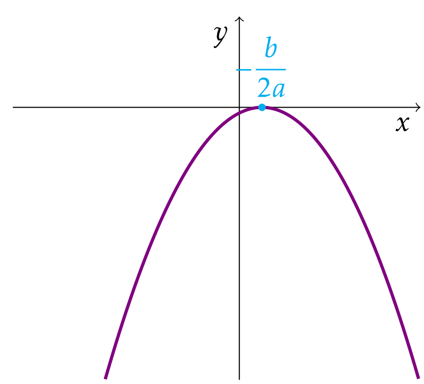
Cas $a > 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$+$	0	$+$	



Cas $a < 0$

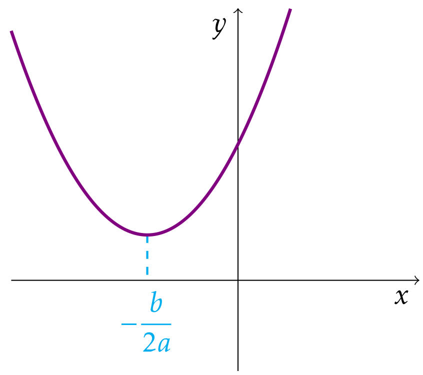
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$-$	0	$-$	



- Si $\Delta < 0$, le signe de $ax^2 + bx + c$ est le même que celui de a. On obtient les tableaux de signe et représentations graphiques suivants :

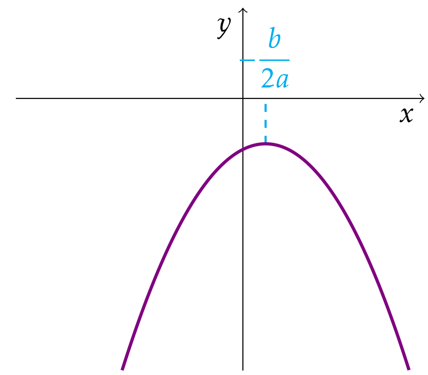
Cas $a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$+$	



Cas $a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$-$	



Propriété 1.7 (En résumé)

- Si $\Delta \leqslant 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a **à l'extérieur** (ou en dehors) des racines.

Exemple 1.17 Résoudre l'inéquation (I) : $-2x^2 - x + 6 \geqslant 0$.

1. **Ensemble de définition de (I) :** $\mathbb{R}$
2. **Résolution :** Le discriminant Δ vaut $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 49 > 0$. D'où $\sqrt{\Delta} = 7$ et l'équation $-2x^2 - x + 6 \geqslant 0$ admet deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -2.$$

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $-2x^2 - x + 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. **Conclusion :** $\mathscr{S} = D_{(I)} \cap \left[-2; \frac{3}{2}\right] = \left[-2; \frac{3}{2}\right]$.

Inéquations avec un quotient

Exemple 1.18 Résoudre l'inéquation (I) : $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{2}{x}<-3$.

1. **Ensemble de définition de (I) :** Pour que l'inéquation soit bien définie, il faut que $x+2\neq 0$ et $x\neq 0$, c'est à dire que $x\neq -2$ et $x\neq 0$ (afin que l'on ne divise pas par 0). D'où $D_{(I)}=\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$.

2. **Résolution de l'équation :** Soit $x\in D_{(I)}$, On regroupe tout d'abord l'ensemble des termes dans un même membre et puis on met au même dénominateur.

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{x+2}+\frac{2}{x}<-3 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x}{x+2}+\frac{2}{x}+3<0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x^2}{x(x+2)}+\frac{2(x+2)}{x(x+2)}+\frac{3x(x+2)}{x(x+2)}<0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x^2+2x+4+3x^2+6x}{x(x+2)}<0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{4x^2+8x+4}{x(x+2)}<0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{4(x^2+2x+1)}{x(x+2)}<0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{4(x+1)^2}{x(x+2)}<0.
\end{aligned}$$

Ensuite, une fois l'ensemble factorisé, on fait un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$(x+1)^2$				$+$	0	$+$			
x				$-$			0	$+$	
$x+2$		$-$	0			$+$			
$\dfrac{4(x+1)^2}{x(x+2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

3. **Conclusion :** D'où $\mathscr{S}=]-2;-1[\cup]-1;0[$.

1.4 Eléments de logique

1.4.1 Quantificateurs

Notations :

- *Le signe $\forall$ placé devant une variable x signifie « quel que soit x… »*
- *Le signe $\exists$ placé devant une variable x signifie « il existe (au moins) un x… »*
- *Le signe $\exists!$ placé devant une variable x signifie « il existe un unique x… »*

Exemple 1.19

- « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1>0$ » se lit : « quel que soit le réel x, x^2+1 est strictement positif » ou « pour tout réel x, x^2+1 est strictement positif ».
- « $\exists x \in]0;+\infty[, x^2-6x+1=0$ » se lit : « il existe au moins un réel x strictement positif tel que x^2-6x+1 est égal à 0 ».
- « $\exists! n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n(n+1)}{2}=3$ » se lit : il existe un unique entier n non nul tel que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3 ». (il s'agit du nombre 2)

Remarque : Dans un énoncé, l'expression « il existe un x » signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. L'unicité sera toujours explicitement indiquée.

Définition 1.5 (Différents types d'énoncés mathématiques)

- Une proposition (ou assertion) mathématique est une affirmation pouvant être vraie ou fausse.
- Un théorème est une proposition qui a été démontrée.
- Un lemme est un théorème servant à établir un théorème plus important.
- Un corollaire est un théorème qui est une conséquence d'un autre théorème.

Exemple 1.20

- La proposition «$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x)>0$» est vraie.
- La proposition «$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x)>0$ » est fausse.
- «$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (2x+1)e^{-x}$ » n'est pas une proposition car on ne peut pas déterminer si elle est vraie ou fausse.

Exercice 1.1 La proposition $\mathcal{P}_1$: « entre 17 et 29 , il existe un multiple de cinq » est-elle vraie?

Elle est vraie car il y a en a bien au moins un : 20 ou 25.

Le travail du mathématicien est d'établir si des assertions sont vraies ou fausses. Pour cela, il faut savoir parfaitement traduire un énoncé en français en langage mathématique. Il est donc important de bien connaître les différents quantificateurs mathématiques.

Exercice 1.2 Ecrire les énoncés suivants avec des quantificateurs.

1. Pour tout nombre strictement positif x, il existe un nombre non nul dont le carré est strictement inférieur à x.

   $\forall x > 0, \exists y \in \mathbb{R}^*, y^2 < x.$

2. La somme de deux réels est commutative.

   $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y + x.$

3. Il existe un unique réel x tel que $f(x)$ est égale à zéro.

   $\exists ! x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$

Attention ! On ne peut pas échanger l'ordre des quantificateurs comme on veut !
Les quantificateurs du même type commutent. Par exemple, il est équivalent de dire :
«$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$» ou « $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = y + x$».
En revanche, de manière générale, on ne peut pas intervertir des quantificateurs de types différents. Par exemple, pour une fonction réelle f, il n'est pas équivalent de dire :
« $\exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$ » et « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M > 0, f(x) \leqslant M$ ».
Quelle est la différence entre ces deux énoncés?

La proposition « $\exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$ » signifie que f est majorée sur $\mathbb{R}$ alors que la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M > 0, f(x) \leqslant M$ » est trivialement vérifiée en prenant $M = f(x)$ par exemple.

Attention ! Quantificateurs ou texte : il faut choisir !
Dans une même proposition, il ne faut pas mélanger du texte et des quantificateurs.
Par exemple, il ne faut pas écrire « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)$ est plus petit que 2. »
Il faut choisir entre « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant 2$ » et « Pour tout x réel, $f(x)$ est inférieur à 2 ».

1.4.2 Connecteurs logiques

Les connecteurs logiques permettent de créer une nouvelle proposition à partir d'une ou plusieurs.

Définition 1.6 Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- **Négation** : La négation (non $\mathcal{P}$) de la proposition $\mathcal{P}$ est la proposition qui dit le contraire de $\mathcal{P}$. Elle est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et elle est fausse quand $\mathcal{P}$ est vraie.
- **Et** : La proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est la proposition qui est vraie lorsque à la fois $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies.
- **Ou** : La proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est la proposition qui est vraie lorsque soit $\mathcal{P}$ soit $\mathcal{Q}$ est vraie (soit les deux).
- **Implication** : La proposition ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) est vraie dès lors que si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit alors que $\mathcal{P}$ **implique** $\mathcal{Q}$.
  L'implication ($\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$) est appelée **réciproque** de ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).
- **Equivalence** : La proposition ($\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$) est vraie dès lors que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont simultanément vraies. En fait,

$$(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}) \text{ signifie } (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$$

Exemple 1.21 Pour un dé lancé, on considère $\mathcal{P}$: « le numéro sorti est pair » et $\mathcal{Q}$: « le numéro sorti est supérieur ou égal à 3 ». On a alors :

- non($\mathcal{P}$) : « le numéro sorti est impair ».
- non($\mathcal{Q}$) : « le numéro sorti est strictement inférieur à 3 ».
- ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) : « le numéro sorti est : 2, 3, 4, 5 ou 6 ».
- ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$): « le numéro sorti est 4 ou 6 ».

La négation

Propriété 1.8 (Passer à la négation) On utilisera les propriétés suivantes :

- Pour passer à la négation, on remplace les quantificateurs $\forall$ par des quantificateurs $\exists$ et vice versa. Cela donne :

$$\text{non } (\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \equiv \exists x \in E, \text{ non } (\mathcal{P}(x)).$$

$$\text{non } (\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \equiv \forall x \in E, \text{ non } (\mathcal{P}(x)).$$

- non (non $\mathcal{P}$)) $\equiv \mathcal{P}$

- **Loi de Morgan :**

$$(\text{ non } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})) \equiv (\text{non}(\mathcal{P}) \text{ et } \text{non}(\mathcal{Q}))$$

$$(\text{non}(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})) \equiv (\text{non}(\mathcal{P}) \text{ ou non } (\mathcal{Q}))$$

Exercice 1.3 Dans chacun des cas suivants, écrire avec des quantificateurs la négation de la proposition donnée.

1. Soit x un réel. $\mathcal{P}$ est « $x \geqslant 5$ ».

   Soit x un réel. non($\mathcal{P}$) est « $x < 5$ ».

2. Soit n un entier. $\mathcal{P}$ est « L'entier n est pair ».

   Soit n un réel. $\mathcal{P}$ s'écrit :
   $$\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k.$$

   Soit n un réel. non($\mathcal{P}$) s'écrit alors :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, n \neq 2k.$$

   Autrement dit, l'entier n est impair.

3. $\mathcal{P}$ est « La fonction réelle f est paire ».

   $\mathcal{P}$ s'écrit :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x).$$

   non($\mathcal{P}$) s'écrit alors :
   $$\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq f(x).$$

4. $\mathcal{P}$ est « La fonction réelle f est majorée ».

   $\mathcal{P}$ s'écrit :
   $$\exists M, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M.$$

   non($\mathcal{P}$) s'écrit alors :
   $$\forall M, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M.$$

5. $\mathcal{P}$ est « $0 \leqslant x < 1$». non($\mathcal{P}$) s'écrit « $x < 0$ ou $x \geqslant 1$ ».

Implication et équivalence

Définition 1.7 Si ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) est vraie, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante pour avoir $\mathcal{Q}$ (dès qu'on a $\mathcal{P}$, on a $\mathcal{Q}$)), et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire pour avoir $\mathcal{P}$ (si on n'a pas $\mathcal{Q}$, on ne peut pas avoir $\mathcal{P}$).

Exemple 1.22 L'implication $\forall x \in \mathbb{R}$, « $x = x^2$ » $\Rightarrow$ « $x \geqslant 0$ » est vraie, mais l'implication réciproque est fausse.

Exercice 1.4 On note x un nombre réel. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses.

1. $(x = 3) \Rightarrow \left(x^2 = 9\right)$ Vraie
2. $\left(x^2 = 9\right) \Rightarrow (x = 3)$ Fausse
3. $\left(x^2 = 9\right) \Rightarrow (x = 3 \text{ ou } x = -3)$ Vraie
4. $(x > 3) \Rightarrow \left(x^2 > 9\right)$ Vraie
5. $(x < -3) \Rightarrow \left(x^2 > 9\right)$ Vraie

Définition 1.8 (Condition nécessaire et suffisante) Si ($\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$) est vraie, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\mathcal{Q}$ (pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il faut et il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie). On dit également que $\mathcal{Q}$ est vraie si et seulement si $\mathcal{P}$ est vraie.

Exercice 1.5 Dire à chaque fois quel type de condition est $\mathcal{P}$ pour $\mathcal{Q}$.

1. $\mathcal{P}$: « Avoir son bac » et $\mathcal{Q}$: « Etre admis en ECG». $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire pour avoir $\mathcal{Q}$. Ainsi $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.
2. $\mathcal{P}$: « Avoir un frère » et $\mathcal{Q}$: « Ne pas être enfant unique ». $\mathcal{P}$ est une condition suffisante pour avoir $\mathcal{Q}$. Ainsi $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.
3. $\mathcal{P}$: « Avoir le droit de voter pour les élections présidentielles » et $\mathcal{Q}$: « Avoir au moins 18 ans ». $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\mathcal{Q}$.

Exercice 1.6 Compléter les propositions suivantes (x désigne un nombre réel).

1. $\left(x^2 = 9\right) \Leftrightarrow$ $(x = 3 \text{ ou } x = -3)$
2. $\left(x^2 > 9\right) \Leftrightarrow$ $(x > 3 \text{ ou } x < -3)$
3. (Le triangle ABC est rectangle en A) $\Leftrightarrow$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Remarque : Une équivalence, c'est donc deux implications. Il est alors très souvent judicieux de démontrer une équivalence **en raisonnant par double implication** *c'est-à-dire en démontrant les deux implications l'une après l'autre. Cela évite beaucoup d'erreurs.*

Exercice 1.7 Soit deux réels a et b. Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \quad a2^n + b3^n = 0) \iff (a = b = 0).$$

Raisonnons par double implication.
($\Leftarrow$) Si $a = b = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $a2^n + b3^n = 0$.
($\Rightarrow$) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a2^n + b3^n = 0$ alors l'égalité est vraie en particulier pour $n = 0$ et $n = 1$ et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a2^0 + b3^0 = 0 \\ a2^1 + b3^1 = 0 \end{cases}$$

Ce système s'écrit :

$$\begin{cases} a + b3 = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases}$$

et on en déduit

$$\begin{cases} b = -a \\ 2a - 3a = 0 \end{cases}$$

et donc $a = b = 0$. Cela prouve la seconde implication.

Propriété 1.9 L'implication $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est équivalente à l'implication suivante : (non $(\mathcal{Q}) \Rightarrow$ non $(\mathcal{P})$). Cette implication est appelée **contraposée** de $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

Exemple 1.23 La contraposée de la proposition : « s'il pleut alors le sol est mouillée » est « si le sol n'est pas mouillé alors il ne pleut pas ».

Exercice 1.8 Donner les contraposées des implications suivantes:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \leqslant 0) \Rightarrow (\exp(x) \leqslant 1)$

   La contraposée est $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp(x) > 1) \Rightarrow (x > 0)$.

2. Si deux droites distinctes sont parallèles, alors elles n'ont pas de point d'intersection. La contraposée est : « Si deux droites distinctes ont un point d'intersection alors elles ne sont pas parallèles ».

Remarque : Cette propriété nous donne un outil supplémentaire pour démontrer une implication. On peut par exemple **raisonner par contraposée.**

Exemple 1.24 Soient x et y deux réels distincts de 1.
Montrer que si $x \neq y$, alors $\frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$.

On raisonne par contraposée. Soient x et y deux réels distincts de 1.
Montrons que si $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}$ alors $x = y$. Supposons que l'on a :

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}$$

et donc

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{y-1} = 0$$

$$\frac{y-1-(x-1)}{(x-1)(y-1) = 0}$$

$$\frac{y-x}{(x-1)(y-1)} = 0$$

C'est-à-dire $x = y$.