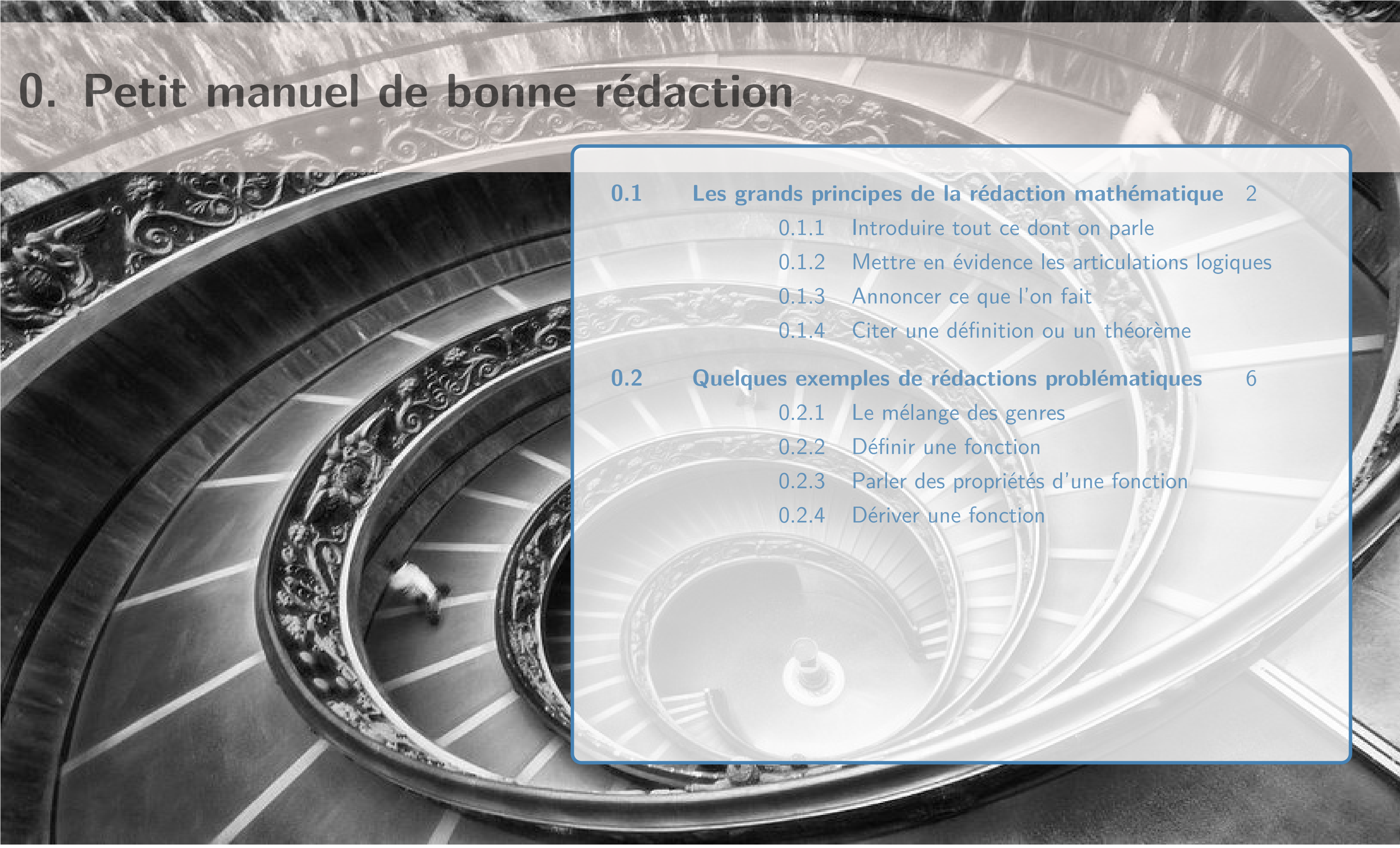

0. Petit manuel de bonne rédaction

> Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement, et les mots pour le dire arrivent aisément.
>
> — Nicolas Boileau

Au delà de la simple résolution de problèmes mathématiques, la rédaction revêt une importance cruciale dans l'apprentissage de cette discipline. Elle permet de développer la clarté et la rigueur dans la pensée, tout en exposant de manière détaillée les étapes d'une démonstration ou d'un raisonnement.

Ainsi, « bien rédiger » peut signifier deux choses :

- exposer sa pensée clairement, c'est-à-dire avec ordre et rigueur, et si possible avec style. Un raisonnement faux peut être bien rédigé, auquel cas il est généralement facile de trouver l'erreur commise. Au contraire, un raisonnement « correct » mal rédigé, est souvent le signe d'une arnaque, volontaire ou non.
- se conformer aux conventions de notations pratiquées par la communauté des personnes auxquelles on s'adresse.
  Par exemple, puisque tout le monde note $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, il faudrait avoir l'esprit tordu pour le noter autrement. On peut toujours insister sur son caractère arbitraire, il n'en demeure pas moins qu'il est nécessaire de fixer une notation si l'on veut pouvoir communiquer.

Dans tout ce texte, les exemples de rédaction correctes sont précédées des symboles ✔✔✔ et les exemples de rédaction incorrectes des symboles ✗✗✗ .

Bien que les conventions de la bonne rédaction ne soient pas gravées dans le marbre dans les moindres détails, les grands principes présentés dans le texte ci-dessous sont partagés par le plus grand nombre.

0.1 Les grands principes de la rédaction mathématique

0.1.1 Introduire tout ce dont on parle

La première règle de rédaction en mathématiques est que

TOUTE NOTATION QUELLE QU'ELLE SOIT DOIT ÊTRE INTRODUITE.

En français, si vous dites « Il a eu 19 au DS de maths » sans préciser qui est ce « il » qui a si bien réussi son DS, vous risquez de ne pas être compris. C'est la même chose en maths. Plusieurs cas sont alors possibles selon que l'on souhaite par exemple introduire un objet quelconque, ou un objet déjà défini auquel on veut simplement donner un nom par souci de concision.

Introduire une variable

Quand on veut introduire x quelconque d'un ensemble E, on peut procéder de deux manières:

✔✔✔ Soit $x \in E$.

✔✔✔ Pour tout $x \in E$: $\cdots$

Oublier ces petits phrases d'introduction est une faute de rédaction.

Imaginez par exemple qu'on vous demande d'établir la proposition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Première réponse :

✗✗✗ $\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x+1} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Rédaction incorrecte car vous n'introduisez pas x. Une telle rédaction entraînera systématiquement, de ma part ou d'un correcteur quelconque, une remarque énervée sur la copie du genre « Qui est x ?! ».

Voici deux réponses correctes :

✔✔✔ Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x+1} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

✔✔✔ Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x+1} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

Tout ceci pourrait sembler au premier abord comme de la maniaquerie. Toutefois, un nombre considérable d'erreurs mathématiques, côté étudiants, provient d'une indifférence totale aux objets manipulés et à leur introduction. Prendre l'habitude d'introduire toutes les variables utilisées vous obligera à réfléchir à la nature des objets et au sens de ce que vous écrivez.

En tout les cas, si les « Soit $x \in E$ » sont une garantie de rigueur, ils sont par ailleurs bien plus que cela. Il arrive souvent qu'on ne sache pas résoudre un problème d'un coup d'un seul. Quelle attitude adopter pour éviter la page blanche ? Dans de nombreuses situations, il suffit de partir du bon pied et d'introduire les objets en jeu avec méthode pour s'en sortir. Imaginez par exemple qu'on vous demande de démontrer le résultat suivant :

« Toute fonction réelle croissante définie sur $\mathbb{R}$ possède une limite en $+\infty$. »

Par où commencer ? Il faut d'abord traduire mentalement l'énoncé dans un langage plus mathématique :

« Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, si f est croissante alors f possède une limite en $+\infty$. »

On sait alors tout de suite par quoi la preuve doit COMMENCER :

✔✔✔ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est croissante.
Montrons que f possède une limite en $+\infty$.

Libre à vous de ne pas savoir poursuivre la démonstration, vous n'avez en tout cas pas le droit de ne pas savoir la commencer ainsi. Tant que vous ne vous donnez pas une fonction f croissante fixée, vous n'êtes pas en mesure de montrer que toute fonction croissante possède une limite en $+\infty$. Maintenant que vous en avez une entre les mains, vous pouvez entamer une réflexion à son sujet. La suite de la preuve vous échappera peut-être, mais au moins vous êtes bien partis.

En résumé, quand on vous demande de démontrer un résultat de la forme « Pour tout $x \in E, \ldots$ », commencez par « Soit $x \in E$. Montrons que ... ». Et si le résultat est de la forme « Pour tout $x \in E$, si x a la propriété $\mathcal{P}$, alors ... », commencez par « Soit $x \in E$. On suppose que x vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Montrons que $\cdots$ ».

Donner un nom à un objet

Il arrive souvent en maths qu'on veuille donner un nom simple à une quantité compliquée parce qu'on sait qu'on va devoir souvent l'écrire. Par exemple, si vous devez employer plusieurs fois dans un raisonnement l'expression $\ln(e^{n_0} + 1)$ dans laquelle n_0 est un entier déjà connu de votre lecteur, vous pouvez choisir de noter K cette quantité et profiter de ce nom pour rendre votre raisonnement plus lisible. Plutôt que $\ln(e^{n_0} + 1)$, vous écrirez partout K. Deux verbes nous permettent d'introduire proprement la notation K, les verbes « poser » et « noter ».

✔✔✔ On note K le réel $\ln(e^{n_0} + 1)$
✔✔✔ On pose $K = \ln(e^{n_0} + 1)$

Ces deux rédactions correctes, tout à fait équivalentes, appellent quelques commentaires :

- Il est impératif dans les deux cas que la lettre K n'ait pas déjà été utilisée ailleurs dans le raisonnement que vous êtes en train de faire, sans quoi elle aurait une double signification.

- Il est impératif dans les deux cas que la lettre n_0 ait été introduite en amont, sinon votre lecteur ne comprendra jamais ce que vous entendez par $\ln(\mathrm{e}^{n_0} + 1)$.

- Dans la deuxième rédaction, la nouvelle lettre K est à gauche du symbole d'égalité et la quantité connue $\ln(e^{n_0}+1)$ à droite.

Attention, l'exemple qui suit est incorrect. Sous l'hypothèse que vous avez déjà introduit le réel positif y en amont, vous n'avez pas le droit d'introduire l'objet x en écrivant :

✗ ✗ ✗ On pose $y = x^2$.

Cette formulation sous-entend que c'est y (à gauche) qui est introduit et que x (à droite) est déjà connu alors que vous vouliez exprimer le contraire. Plus profondément, la relation $y = x^2$ ne définit pas UN SEUL réel mais DEUX, à savoir $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$. Quel sens cela a-t-il de dire « On pose $\cdots$ » si on ne sait même pas quel réel précis on est en train d'introduire? Voici finalement deux façons correctes d'introduire un réel x de carré y.

✔✔✔ On pose $x = \sqrt{y}$.
✔✔✔ On pose $x = -\sqrt{y}$.

Comme nous venons de le voir, les verbes « poser » et « noter » servent à donner de petits noms simples à des expressions compliquées, mais on les utilise aussi et surtout pour justifier l'EXISTENCE d'un objet. Imaginez qu'on vous demande de montrer l'existence de deux réels x et y dont la somme est un entier mais qui ne sont pas eux-mêmes des entiers - autrement dit, avec des quantificateurs : $\exists x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \quad x + y \in \mathbb{Z}$. Démontrer un résultat d'existence revient dans la mesure du possible à EXHIBER UN EXEMPLE. Ici, vous devez sortir de votre chapeau deux réels x et y qui satisfont les propriétés demandées. Après un instant de réflexion :

✔✔✔ On pose $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{1}{2}$. Les réels x et y ne sont pas entiers,
mais leur somme $x + y = 1$ en est un.

On n'a bien sûr pas trouvé là le seul exemple de réels x et y possible, mais un seul exemple suffit à prouver leur existence. Retenez bien de tout ceci que les verbes « poser » et « noter » sont liés au quantificateur existentiel $\exists$ alors que l'expression « Soit $\cdots$ » était lié au quantificateur universel $\forall$.

0.1.2 Mettre en évidence les articulations logiques

Quand on rédige un raisonnement, il est très important de distinguer clairement les hypothèses des conclusions, et d'indiquer les rapports d'implication entre propositions. Le français est très riche en mots de liaison, profitez-en :

donc	or	par conséquent	en outre
ainsi	alors	puisque	dès lors
aussitôt	ensuite	de plus	mais
cependant	enfin	car	i.e ...

Votre raisonnement doit être truffé de ces petits mots qui guident le lecteur et facilitent la compréhension.

Par exemple, imaginez qu'on vous demande de montrer la proposition :

$$\forall x \in [0;1], \quad e^{-x^2} \in [0;1].$$

Voici deux exemples classiques (mais incorrects !) de rédaction :

✗✗✗

$$\begin{array}{ll} 0 \leqslant x \leqslant 1 & \\ 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 & \text{car } t \mapsto t^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ -1 \leqslant -x^2 \leqslant 0 & \\ 0 < e^{-1} \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^0 = 1 & \text{car } t \mapsto e^t \text{ est croissante sur } \mathbb{R}. \end{array}$$

Tout n'est pas à jeter ici. La présence des arguments sur la croissance des fonctions est notamment un très bon point ! Cependant, plusieurs choses sont à noter. La première... Qui est ce x ?! Il aurait fallu l'introduire au préalable (comme expliqué dans le paragraphe précédent). Ensuite, aucun connecteur logique n'indique le lien de causalité pour passer d'une ligne à l'autre. Tel que rédigé ici, les différentes lignes du raisonnement semblent sans lien entre elles !

✗✗✗

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leqslant -x^2 \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 < e^{-1} \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^0 = 1.$$

Le problème ici est l'utilisation incorrecte du symbole « $\Longrightarrow$ ». À ce titre, on retiendra l'affirmation suivante :

Attention ! La flèche d'implication « $\Longrightarrow$ » NE signifie PAS « donc » et on l'utilise rarement.

Il faut bien comprendre à ce propose que $A \Longrightarrow B$ signifie : « SI A est vrai, ALORS B est vrai ». Cela ne signifie en aucun cas que A ou B est vrai. On se référera à ce propos au Chapitre 1.

Voici un exemple de rédaction correcte.

✔✔✔

Soit $x \in [0;1]$.
Alors $\quad 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \qquad$ car $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Donc, $\quad -1 \leqslant -x^2 \leqslant 0$
Donc, $\quad e^{-1} \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^0 \qquad$ car $t \mapsto e^t$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
i.e, $\quad 0 < e^{-x^2} \leqslant 1 \qquad$ car $e^{-1} > 0$ et $e^0 = 1$.
Ainsi, on a bien montré que : $\forall x \in [0;1], \quad 0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1$.

0.1.3 Annoncer ce que l'on fait

Rédiger correctement une démonstration, c'est en premier lieu expliquer ce que l'on fait. Rendez votre travail lisible en annonçant régulièrement ce que vous vous apprêtez à prouver: « Montrons que ... », « Il nous reste à montrer que ... », etc.

0.1.4 Citer une définition ou un théorème

Citer une définition ou un théorème exige beaucoup de précisions. Les objets en jeux (une fonction, un réel, une suite, etc) doivent être correctement introduits (voir le paragraphe 0.1.1). Il faut parfaitement connaître les hypothèses que doivent vérifier les objets. Enfin, les conclusions doivent être énoncées clairement et sans faute.

Imaginez par exemple que l'on vous demande de définir le nombre dérivé d'une fonction en un point. Première réponse :

✗✗✗ Le nombre dérivé de f en a vaut $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Ici, il y a plusieurs problèmes. Qui sont f et a ? Et pourquoi la limite existe-t-elle ? Correction :

✔✔✔ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que f est *dérivable* en a si la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.
Dans ce cas, la limite est appelée le *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$.

Connaître une définition ou un théorème, c'est être capable de les rédiger ainsi.

0.2 Quelques exemples de rédactions problématiques

0.2.1 Le mélange des genres

Attention ! Écrivez en français ou utilisez des symboles mathématiques, mais ne mélangez pas les deux !

Imaginons par exemple que l'on dispose d'une fonction f définie sur un intervalle I, et qui s'annule sur cet intervalle. Alors, on n'écrit pas :

✗✗✗ La fonction f s'annule sur I donc $\exists x \in I$ tel que $f(x) = 0$.

mais plutôt :

✔✔✔ La fonction f s'annule sur I donc il existe $x \in I$ tel que $f(x) = 0$.

De même, ne remplacez pas l'expression « pour tout » par le symbole $\forall$ dans une phrase en français.

Le mélange autorisé le plus courant concerne le symbole $\in$. L'exemple précédent en témoigne, de même que la classique expression « Soit $x \in E$ ». Il n'est pas nécessaire d'écrire en toute lettres « Soit x un élément de E ». En revanche, le verbe « appartenir » ne doit pas être remplacé par le symbole $\in$ au cœur d'une phrase en français :

✗✗✗ Le nombre 17 $\in$ à l'ensemble des nombres premiers.

0.2.2 Définir une fonction

Commençons par l'erreur classique :

✗ ✗ ✗ La fonction $x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Le problème dans cet exemple, c'est $x^2 + 1$ N'EST PAS UNE FONCTION ! On dit plutôt que c'est une *expression*.

Une *fonction* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par exemple, est un objet mathématique qui associe à tout réel un autre réel. Définir une telle fonction f revient donc à définir la façon dont un réel quelconque, disons x, est transformé en un autre réel $f(x)$. La fonction, notée f, est l'objet abstrait qui « transforme » les x en $f(x)$. La quantité $f(x)$ est quant à elle un simple réel et n'a de sens que si l'on s'est donné un réel x concret. On a coutume de noter également $x \longmapsto f(x)$ la fonction f. Cette notation indique bien en quoi f n'est pas simplement le réel $f(x)$, mais la manière dont on passe de façon générale d'un réel x à un réel $f(x)$.

Attention de ne pas confondre les flèches $\longrightarrow$ et $\longmapsto$! La flèche $\longrightarrow$ est utilisée typiquement dans le cadre des limites. Seule la flèche $\longmapsto$ convient pour les fonctions.

✗ ✗ ✗ $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ ✔✔✔ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

✗ ✗ ✗ La fonction $x \longrightarrow e^{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. ✔✔✔ La fonction $x \longmapsto e^{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

En pratique, quand on veut faire référence à une fonction précise dans une phrase, soit la fonction a un nom et on peut employer ce nom (par exemple f, $\sqrt{\cdot}$, exp, ln, sin, cos...), soit la fonction n'a pas de nom mais elle est définie par une expression explicite et on la note alors $x \longmapsto \ldots$ Dans cette notation, la lettre x peut être remplacée par n'importe quel symbole.

Et comment faire pour définir une fonction qui n'a pas été précédemment introduite ? Prenons l'exemple de la fonction maladroitement introduite dans le tout premier exemple de cette partie. Voici plusieurs manières de l'introduire proprement :

✔✔✔ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto x^2 + 1$.

✔✔✔ On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$.

Notez bien la différence de flèches employées dans le deuxième exemple. La flèche du haut, qui relie l'ensemble de départ à l'ensemble d'arrivée, s'écrit $\longrightarrow$. Celle du bas, qui indique comment le réel x est transformé pour obtenir $f(x)$, s'écrit $\longmapsto$.

0.2.3 Parler des propriétés d'une fonction

Les exemples suivants sont incorrectement rédigés :

✗ ✗ ✗ La fonction $x \longmapsto x^2$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

✗ ✗ ✗ La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Le problème ici, est que l'on ne dit pas qu'une fonction est dérivable/croissante « pour tout $x \in \ldots$ ». En effet, la fonction $x \longmapsto x^2$ ne dépend pas de x ! On aurait très bien pu écrire $t \longmapsto t^2$, voire $\clubsuit \longmapsto \clubsuit^2$.

Voici donc ce qu'il convient d'écrire :

✔✔✔ La fonction $x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
✔✔✔ La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

0.2.4 Dériver une fonction

La rédaction d'un calcul de dérivée pose parfois problème. Imaginez que l'on veuille par exemple dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \overset{f}{\longmapsto} e^{x^2+1}$. Voici un exemple de réponse incorrectement rédigée:

✗✗✗ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(e^{x^2+1}\right)' = \left(x^2+1\right)' e^{x^2+1} = 2xe^{x^2+1}$.

La notation $(f(x))'$ est INTERDITE, pour la simple et bonne raison que, comme expliqué plus haut, $f(x)$ n'est pas une fonction mais un réel. Or, on dérive bien une fonction ! Vous pouvez raisonner comme ci-dessus au brouillon, mais sur votre copie, la meilleure rédaction est souvent la plus courte dans un cas comme celui-là :

✔✔✔ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$.