Colles n° 9

Exercice 1 *Question de cours*

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2 *Question de cours*

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 3 *Question de cours*

Soient E, F et G des espaces vectoriels et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, montrer que :

$$g \circ f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).$$

Exercice 4

Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image.

1. $f_1 : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$
3. $f_3 : \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$

Exercice 5

On considère l'application $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ définie par $\phi(P(x)) = xP'(x)$.

1. Vérifier que si $P \in \mathbb{R}_2[x]$ alors $xP'(x) \in \mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$.
3. Calculer $\mathrm{Ker}\,\phi$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\phi$.

Exercice 6

On note $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.

1. Montrer que f est un application linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 7

On note $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AMA$.

1. Montrer que f est un application linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 8

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 9

Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -u$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.