Colles n° 9

Exercice 1 *Question de cours*

Calculer une primitive de $t \mapsto \ln(t)$.

Exercice 2 *Question de cours*

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3 *Question de cours*

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 4

Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 |t^3 - 2t^2 + 2t - 1| \mathrm{d}t$.

Exercice 5

1. Déterminer les réels a, b, c tels que : $\forall x \neq 0, \dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.
2. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{x\left(x^2+1\right)} \mathrm{d}x$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{x\ln(x)}{\left(x^2+1\right)^2} dx$.

Exercice 6

Calculer l'intégrale $\quad I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \quad$ en posant le changement de variables $t = \sin(u)$.

Exercice 7

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Exercice 8

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale : $I_n = \int_1^e x^2(\ln(x))^n dx$

1. Calculer I_1.
2. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (c) Montrer que : $\forall x \in [1, e], \ln(x) \leq \frac{x}{e}$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 9

Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image.

1. $f_1 : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$
3. $f_3 : \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$

Exercice 10

On considère l'application $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ définie par $\phi(P(x)) = xP'(x)$.

1. Vérifier que si $P \in \mathbb{R}_2[x]$ alors $xP'(x) \in \mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$.
3. Calculer $\mathrm{Ker}\,\phi$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\phi$.

Exercice 11

On note $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.

1. Montrer que f est un application linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 12

On note $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AMA$.

1. Montrer que f est un application linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image.