Colles n° 8

Exercice 1 *Question de cours*

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2 *Question de cours*

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3 *Question de cours*

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, calculer $E(X)$. Combien vaut $V(X)$?

Exercice 4 *Question de cours*

Calculer une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5

Un forain dispose d'une roue divisée en huit secteurs égaux : trois blancs, un vert, et quatre rouges. Il invente le jeu suivant : le joueur lance la roue une première fois : s'il obtient le secteur vert, il gagne 11 euros ; s'il obtient un secteur blanc, il perd ; enfin, s'il obtient un secteur rouge, il lance la roue une seconde fois : s'il obtient alors le secteur vert, il gagne 8 euros, s'il obtient un secteur blanc, il gagne 6 euros et enfin s'il obtient à nouveau un secteur rouge, il perd définitivement.
Quel prix doit faire payer le forain pour que chaque partie lui rapporte en moyenne deux euros ?

Exercice 6

L'oral d'un concours comporte 100 sujets. Chaque candidat en tire au sort deux et choisit celui qu'il souhaite traiter. Un candidat arrive en ayant révisé 60 des 100 sujets.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :

   (a) Les deux sujets ? (b) Exactement un ? (c) Aucun ?

2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème dont on déterminera la loi de probabilité et l'espérance.

Exercice 7

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, \ldots, n, \ldots$ de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ, la puce se situe sur la case 0 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n et Y_n les variables aléatoires représentant respectivement le numéro de la case où se trouve la puce après n sauts et le nombre de sauts d'une case effectués au cours des n premiers sauts.

1. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Exprimer X_n en fonction de Y_n. En déduire la loi de X_n.
3. Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 8

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n et on en tire, au hasard et en une seule fois, une poignée de k jetons ($k \geq 2$). On note X le plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer le support de X.
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, calculer $P(X \leq i)$.
3. En déduire la loi de X.

Exercice 9

On dispose de n urnes $U_1, \ldots, U_n$, l'urne U_k contenant k jetons numérotés de 1 à k. On choisit une urne au hasard et dans cette urne, on choisit un jeton au hasard. Soit X le numéro porté par le jeton obtenu. Déterminer la loi de X.

Exercice 10

Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 |t^3 - 2t^2 + 2t - 1| \mathrm{d}t$.

Exercice 11

1. Déterminer les réels a, b, c tels que : $\forall x \neq 0, \dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.
2. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{x\ln(x)}{\left(x^2+1\right)^2} dx$.

Exercice 12

Calculer l'intégrale $\quad I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2} \mathrm{d}t \quad$ en posant le changement de variables $t = \sin(u)$.

Exercice 13

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Exercice 14

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale : $I_n = \int_1^e x^2(\ln(x))^n dx$

1. Calculer I_1.
2. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (c) Montrer que : $\forall x \in [1, e], \ln(x) \leq \frac{x}{e}$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

