

Feuille de colles n° 7

Exercice 1 Question de cours

Soit E un espace vectoriel, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 2 Question de cours

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$

Exercice 3 Question de cours

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 \ln(x) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$.

Exercice 4 Question de cours

Montrer que $\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq e^x - 1 \leq xe$.

Exercice 5 Question de cours

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 6 Question de cours

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 7

1. Montrer que la famille $((1, 1, 0), (1, 2, 1), (2, 3, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $(0, 1, -2)$ dans cette base.

Exercice 8

1. Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 9

Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(x) = e^{kx}$.
Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 10

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ et l'ensemble

$$F = \{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 2X \}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Donner une famille génératrice de F . Cette famille génératrice est-elle une base de F ?

Exercice 11

1. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une famille génératrice de F .
3. En déduire une base.

Exercice 12

1. Montrer que $E = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) = P(1) = 0 \}$ est un espace vectoriel.
2. Déterminer une famille génératrice de E .
3. En déduire une base.

Exercice 13

1. Montrer que $F = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}, 3P(x) - xP'(x) + xP''(x) = 0 \}$ est un espace vectoriel.
2. Déterminer une famille génératrice de E .
3. En déduire une base.

Exercice 14

Pour quelle(s) valeur(s) $a \in \mathbb{R}$, la fonction suivante est-elle dérivable en 0?

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ \sin(ax) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 15

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $|\sqrt{2+x} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |x - 2|$.

Exercice 16

A l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right)$.

Exercice 17

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Exercice 18

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan} \left(\frac{1}{1+x+x^2} \right) = \text{Arctan}(1+x) - \text{Arctan}(x)$. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \text{Arctan} \left(\frac{1}{1+k+k^2} \right).$$

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $] -\infty, -2[\cup] -2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

1. (a) Dresser le tableau de variation de f et préciser $f([0, 1])$.

(b) Montrer que : $\forall x \in [0, 1], \quad \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

(c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0, 1]$. On notera a cette unique solution dans la suite du problème.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1]$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3} |u_n - a|$.

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n$.

(d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.