Feuille de colles n° 7

Exercice 1 *Question de cours*

Soit E un espace vectoriel, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2 *Question de cours*

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

Exercice 3 *Question de cours*

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 \ln(x) \text{ si } x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$.

Exercice 4 *Question de cours*

Montrer que $\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq \mathrm{e}^x - 1 \leq x\mathrm{e}$.

Exercice 5 *Question de cours*

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.

Exercice 6 *Question de cours*

Montrer que $\forall n \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 7

1. Montrer que la famille $((1,1,0),(1,2,1),(2,3,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $(0,1,-2)$ dans cette base.

Exercice 8

1. Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 9

Montrer que la famille (x^2+1, x^2+x-1, x^2+x) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 10

Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$.
Montrer que la famille $(f_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 11

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ et l'ensemble

$$F = \{\, X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad MX = 2X \}\,.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Donner une famille génératrice de F. Cette famille génératrice est-elle une base de F ?

Exercice 12

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(2-x) = P(x)\}$.
1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer une famille de deux vecteurs génératrice de F.
3. Est-elle libre ?

Exercice 13

Pour quelle(s) valeur(s) $a \in \mathbb{R}$, la fonction suivante est-elle dérivable en 0 ?

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ll} x & \text{si} \quad x < 0 \\ \sin(ax) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exercice 14

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\left|\sqrt{2+x} - 2\right| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,|x-2|$.

Exercice 15

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable s'annulant en a et b.
1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) + \alpha f(c) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) + cf(c) = 0$

Exercice 16

A l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 17

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Exercice 18

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arctan}(1+x) - \operatorname{Arctan}(x)$. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right).$$

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$ par $\quad f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+2}$.

1. (a) Dresser le tableau de variation de f et préciser $f([0,1])$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [0,1], \quad \dfrac{1}{4} \leq f'(x) \leq \dfrac{2}{3}$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$. On notera a cette unique solution dans la suite du problème.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - a| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - a|$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   (d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.