

Feuille de colles n° 6

Exercice 1 *Question de cours*

Enoncer et démontrer la formule du Triangle de Pascal.

Exercice 2 *Question de cours*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.
4. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.

Exercice 3 *Question de cours*

Un dé est truqué pour que le 6 apparaisse deux fois plus souvent que les autres faces qui, elles, ont toutes la même probabilité de tomber. Calculer $P(\{4, 5, 6\})$.

Exercice 4 *Question de cours*

Considérons une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage constitué de 3 boules blanches ?

Exercice 5 *Question de cours*

On considère une urne contenant 5 boules vertes et une boule jaune.

- Si on tire une boule verte, on la met de côté et on refait un tirage.
- Si on tire la boule jaune, on la remet dans l'urne et on refait un tirage.

Déterminer la probabilité d'obtenir la boule jaune au deuxième tirage.

Exercice 6 *Question de cours*

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 7

On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules rouges, toutes indiscernables au toucher.

1. On tire successivement trois boules dans l'urne, sans remettre la boule tirée après chaque tirage.
 - (a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur ?
 - (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?
2. On tire successivement trois boules dans l'urne, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
 - (a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur ?
 - (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?

Exercice 8

On dispose de deux dés :

- le dé A possède quatre faces rouges et deux faces blanches ;
- le dé B possède deux faces rouges et quatre faces blanches.

On lance une pièce de monnaie équilibrée :

- si on obtient pile, on décide de jouer uniquement avec le dé A ;
- si on obtient face, on décide de jouer uniquement avec le dé B .

Calculer la probabilité d'obtenir rouge avec un lancer quelconque de dé.

Exercice 9

On considère deux urnes notées $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. L'urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.

On réalise l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ? une boule blanche ? deux boules noires ? une boule noire ? aucune boule noire ? aucune boule blanche ?

Exercice 10

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsque le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n -ième sondage est positif » est noté V_n , et on note $p_n = P(V_n)$. L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant est également positif avec une probabilité 0,6 ;
- si un sondage est négatif, le suivant est également négatif avec une probabilité 0,9.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire que : $p_1 = 1$.

1. Calculer $P(V_2)$ et $P(V_3)$.
2. Calculer la probabilité que les trois premiers sondages soient positifs.
3. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,1$.
4. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n .

Exercice 11

Un entreprise étudie la probabilité qu'un de ses salariés soit absent pour maladie.

- Une salarié malade est toujours absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n , le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n , le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est malade la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

1. Déterminer la valeur de p_3 .
2. Sachant que le salarié a été malade la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait aussi été malade la deuxième semaine.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
4. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n .

Exercice 12

N personnes numérotées de 1 à N se transmettent une information. Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et la transmet fidèlement avec une probabilité $1 - p$. Quelle est la probabilité que l'information parvienne non déformée à la N -ième personne ?