Feuille de colles n° 6

Exercice 1 *Question de cours*

Enoncer et démontrer la formule du Triangle de Pascal.

Exercice 2 *Question de cours*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.
4. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.

Exercice 3 *Question de cours*

Un dé est truqué pour que le 6 apparaisse deux fois plus souvent que les autres faces qui, elles, ont toutes la même probabilité de tomber. Calculer $P(\{4, 5, 6\})$.

Exercice 4 *Question de cours*

Considérons une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage constitué de 3 boules blanches ?

Exercice 5 *Question de cours*

On considère une urne contenant 5 boules vertes et une boule jaune.

- Si on tire une boule verte, on la met de côté et on refait un tirage.
- Si on tire la boule jaune, on la remet dans l'urne et on refait un tirage.

Déterminer la probabilité d'obtenir la boule jaune au deuxième tirage.

Exercice 6 *Question de cours*

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 7

On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules rouges, toutes indiscernables au toucher.

1. On tire successivement trois boules dans l'urne, sans remettre la boule tirée après chaque tirage.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?
2. On tire successivement trois boules dans l'urne, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?

Exercice 8

On dispose de deux dés :
- le dé A possède quatre faces rouges et deux faces blanches ;
- le dé B possède deux faces rouges et quatre faces blanches.

On lance une pièce de monnaie équilibrée :
- si on obtient pile, on décide de jouer uniquement avec le dé A ;
- si on obtient face, on décide de jouer uniquement avec le dé B.

Calculer la probabilité d'obtenir rouge avec un lancer quelconque de dé.

Exercice 9

On considère deux urnes notées $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. L'urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.

On réalise l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ? une boule blanche ? deux boules noires ? une boule noire ? aucune boule noire ? aucune boule blanche ?

Exercice 10

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, et on note $p_n = P(V_n)$. L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :
- si un sondage est positif, le suivant est également positif avec une probabilité $0,6$;
- si un sondage est négatif, le suivant est également négatif avec une probabilité $0,9$.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire que : $p_1 = 1$.
1. Calculer $P(V_2)$ et $P(V_3)$.
2. Calculer la probabilité que les trois premiers sondages soient positifs.
3. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0.1$.
4. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.

Exercice 11

Un entreprise étudie la probabilité qu'un de ses salariés soit absent pour maladie.
- Une salarié malade est toujours absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n, le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n, le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est malade la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
1. Déterminer la valeur de p_3.
2. Sachant que le salarié a été malade la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait aussi été malade la deuxième semaine.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
4. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.

Exercice 12

N personnes numérotées de 1 à N se transmettent une information. Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec la probabilité $p \in]0,1[$ et la transmet fidèlement avec une probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité que l'information parvienne non déformée à la N-ième personne ?