Feuille de colles n° 5

Exercice 1 *Question de cours*

Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$$

Montrer que P est le carré d'un polynôme Q de degré 2 à déterminer.

Exercice 2 *Question de cours*

Calculer toutes les dérivées du polynôme $x \mapsto x^n$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Exercice 3 *Question de cours*

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, démontrer le résultat suivant : α est une racine de P ssi $x - \alpha$ divise P.

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $4x^3 - 20x^2 + 33x - 18 > 0$
2. $2x^3 - 5x^2 + x + 2 \leq 0$
3. $2x^3 + 4x^2 - x - 2 \geq 0$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) : \quad \mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x} + 1 - 6\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(I) : \qquad (\ln(x))^5 + 5(\ln(x))^4 + 10(\ln(x))^3 + 11(\ln(x))^2 + 7\ln(x) + 2 > 0.$$

Exercice 7

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que $P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose P le polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P : x \to (x+1)^n$.

1. Calculer de deux manières différentes la dérivée P' de P.
2. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 9

Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{4}{5};+\infty\right[& \longrightarrow & \left]-\infty;\frac{3}{5}\right[\\ x & \longmapsto & \frac{3x+2}{5x+4} \end{array} \right.$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 10

Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & [\mathrm{e}^{-14};+\infty[\\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{7x^2-14} \end{array} \right.$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 11

Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [\ln(2);+\infty[\\ x & \longmapsto & \ln(3x^2+2) \end{array} \right.$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 12

Calculer lorsque c'est possible les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+3x-1}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(x+3)-\ln(x-1))$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3})$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+x+\ln(x)}{3\ln(x)}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} (\ln(x))^{\ln(x)}$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{\arctan(x)-x^2}$

Exercice 13

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x+1 \leq \mathrm{e}^x \leq 1+x\mathrm{e}^x$.
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 14

1. Montrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

1. Exprimer $f(x)$ pour $x>1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Exprimer $f(x)$ pour $x<-1$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
3. (a) Montrer que : $\forall x>0$, $1-x<f(x)\leq 1$. En déduire que f admet une limite à droite en 0.
   (b) Montrer de même que f admet une limite à gauche en 0.

Exercice 16

Etudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0, \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Exercice 17

Déterminer l'ensemble de définition et de continuité des fonctions suivantes, puis chercher si elles admettent un prolongement par continuité aux bornes de leur ensemble de définition.

1. $f_1(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$

2. $f_2(x) = \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{(x-2)^2}$

3. $f_3(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x+1}$

Exercice 18

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 19

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = nx - \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on notera u_n.
2. Calculer $f_n(0)$ et $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$. En déduire un encadrement de u_n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Montrer que $nu_n = \mathrm{e}^{-u_n}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.