Feuille de colles n° 4

Exercice 1 *Question de cours*

Montrer que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 2 *Question de cours*

Soient $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$, on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2. Montrer que $\ell_1 = \ell_2$.

Exercice 3 *Question de cours*

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{n}{n^2+k} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$.
2. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n, montrer que
$$\frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$
3. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4

Dans chacun des cas, déterminer (si elle existe) la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \dfrac{2}{n^2+1}$
2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n+2} + 4$
4. $u_n = 5 + \left(\dfrac{5}{\pi^2}\right)^n$
5. $u_n = -1 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$
6. $u_n = \dfrac{2^{3n}}{16^n}$
7. $u_n = \dfrac{7n-3}{14n-1}$
8. $u_n = \dfrac{n^2-n}{n^2+n}$
9. $u_n = \dfrac{-6n+\frac{1}{n}}{-3n+\frac{1}{n^2}}$
10. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$
11. $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\ln(n+2)}$
12. $u_n = \dfrac{n^3+5n-\ln(n)}{\frac{1}{n^2}+5n^3}$
13. $u_n = \dfrac{7^{n+1}+6^{n+1}}{6^n+7^n}$
14. $u_n = \mathrm{e}^{-3n^3+5n-\frac{2}{n}}$
15. $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \dfrac{n+1}{2n+(-1)^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{n+1}{2n+1} \leqslant \frac{n+1}{2n+(-1)^n} \leqslant \frac{n+1}{2n-1}$$
2. En déduire que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer par récurrence sur n que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (u_n)^2 \geq 2n + (u_0)^2.$$
4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{n}{n+1} \leqslant \ln(u_n) \leqslant 1.$$
3. En déduire la convergence des suites $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8

On admet dans un premier temps le résultat suivant :
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \frac{w_0 + 2w_1 + \ldots + 2^n w_n}{2^{n+1}}$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \alpha$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \alpha$.

1. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad a_{n+1} = \frac{1 + (n+1)a_n}{2n+3}$$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :
$$0 < a_n \leq \frac{2}{n+1}$$
   (b) En déduire la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\forall n \geq 0, u_n = na_n$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \geq 0$, $v_n = 2u_{n+1} - u_n$.
   (a) Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que $\forall n \geq 0$:
$$u_{n+1} = \frac{v_0 + 2v_1 + \ldots + 2^n v_n}{2^{n+1}}$$
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrer le résultat admis en début d'énoncé.

Exercice 9

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1[,\quad \ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$.
2. En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,
$$\ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\right).$$
3. En déduire que pour $n \geqslant 2$,
$$\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln\left(\frac{2n}{n-1}\right).$$
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

Exercice 10

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

Indication : on pourra commencer par étudier les suites (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) .

Exercice 11

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle converge.
3. Majorer et minorer u_n, puis en déduire un encadrement de la limite de (u_n).