

Feuille de colles n° 3

Exercice 1 *Question de cours*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer la puissance n-ème de A .

Exercice 2 *Question de cours*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 3 *Question de cours*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 4 *Question de cours*

La matrices $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 5 *Question de cours*

La matrices $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 6

Résoudre, en discutant selon la valeur du paramètre m le système suivant :

$$\begin{cases} -mx - y = 0 \\ -3x + (2-m)y = 0 \end{cases}$$

Exercice 7

Résoudre, en discutant selon la valeur du paramètre m le système suivant :

$$\begin{cases} -mx - y = 0 \\ x - my = 0 \end{cases}$$

Exercice 8

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Conjecturer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non nul.
2. Démontrer votre conjecture.

Exercice 9

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = u_n A + v_n I$.
3. On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$. De quelle nature sont les suites (α_n) et (β_n) ?
4. En déduire u_n et v_n puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par leur premiers termes u_0 et v_0 et par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

2. Montrer que A s'écrit sous la forme

$$A = 3I_2 + J,$$

où J est une matrice à déterminer.

3. Vérifier que $J^2 = 0$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = 3^n I_2 + n 3^{n-1} J.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

5. En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n , u_0 et v_0 .

Exercice 11

On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que :

$$(M - 3I_2)(M - 4I_2) = 0_2$$

2. Exprimer M^2 en fonction de M et de I_2 .
3. Démontrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in \mathbb{R}, \exists b_n \in \mathbb{R}, M^n = a_n M + b_n I_2.$$

On a ainsi défini deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = a_n M + b_n I_2$.

4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = 3a_n + b_n \quad \text{et} \quad v_n = 4a_n + b_n$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont géométriques et en déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n .

5. En déduire l'expression de M^n en fonction de n .