Feuille de colles n° 3

Exercice 1 *Question de cours*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer la puissance n-ème de A.

Exercice 2 *Question de cours*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 3 *Question de cours*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4 *Question de cours*

La matrices $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 5 *Question de cours*

La matrices $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 6 *Question de cours*

La matrices $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 7

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. Conjecturer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non nul.
3. Démontrer votre conjecture.

Exercice 8

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
   En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, \quad A^n = u_n A + v_n I$.
3. On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$.
   De quelle nature sont les suites (α_n) et (β_n) ?
4. En déduire u_n et v_n puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que la suite (a_n) est arithmético géométrique.
3. En déduire les expressions de a_n puis de A^n en fonction de n.

Exercice 10

Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice A_m est inversible et calculer A_m^{-1} pour ces valeurs, où A_m est donnée par

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Exercice 11

Soit la matrice $B = (\min(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$ i.e. la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

1. Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tMM$.
2. En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.

Exercice 12 *Matrices stochastiques*

Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j}$ est un réel positif ou nul, et si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. On note $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner des exemples de matrices stochastiques.
2. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda \cdot A + (1-\lambda) \cdot B$ est dans $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ également.
   Pour la culture : un ensemble satisfaisant une telle propriété est dit convexe.
3. (a) Notons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in \mathcal{ST}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall i,j, a_{i,j} \geq 0 \\ AX = X \end{array} \right.$.
   (b) En déduire que si A et B sont stochastiques, alors $A \times B$ est stochastique.

Exercice 13 *Lemme d'Hadamard*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice carré d'ordre n à coefficients réels telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on ait : $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.
On dit que A est une matrice à diagonale strictement dominante.
Montrer que la matrice A est inversible.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde en considérant une matrice colonne X non nulle telle que $AX = 0$.