

Feuille de colles n° 2

Exercice 1 Question de cours

1. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}.$

Exercice 2 Question de cours

Donner le domaine de définition, la périodicité, la parité, les variations sur une période et le graphe des fonctions cosinus et sinus.

Exercice 3 Question de cours

Donner le domaine de définition, la périodicité, la parité, les variations sur une période et le graphe des fonctions tangente et arctangente.

Exercice 4 Question de cours

Montrer que la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.

Exercice 5

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1).$$

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^n x^{2k}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4. $\sum_{k=3}^{n+2} \frac{6}{3^{k+1}}$

7. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{\frac{k}{2}}$

2. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{3e^{3k}}$

5. $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{2^k}{5^{k-2}}$

8. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

3. $\sum_{k=2}^{n+1} (k^2 - 5k + 3)$

6. $\sum_{k=1}^n \ln(k)$

9. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 2^k$

Exercice 7

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

2. Calculer la valeur exacte de S_n .

Exercice 8

Calculer la somme : $\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{n}{k} 2^{j+k}.$

Exercice 9

Donner le domaine de définition et déterminer l'expression de $f \circ g$ et $g \circ f$ pour les fonctions f et g suivantes. On prendra soin de définir de bien vérifier que les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies.

1. $f(x) = \sqrt{2+x}$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$
2. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^2 - 5x + 6$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x - \pi$

Exercice 10

1. Etudier la parité de la fonction $g : x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$
2. Etudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$
3. Etudier la parité de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}.$

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $\ln(e^{x+1}) = e^{x+1} + x$
2. $\ln(2x-2) - \ln(x+1) \leq \ln(3)$
3. $\ln\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) < 0$
4. $e^{x^2-3x+1} - e^{5x-1} = 0$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $|3x-2| \geq 4$
2. $|5x-3| - |x-1| = 0$
3. $|x^2-5x+8| = 2$

Exercice 13

Soit la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x) + 2x$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Dresser le tableau de variations de f . On précisera les limites au bord du domaine.

Exercice 14

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et $-\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.