

## Colles n° 11

### Exercice 1 *Question de cours*

1. Montrer que  $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$  est une droite vectorielle de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

### Exercice 2 *Question de cours*

Démontrer la proposition suivante :

Soient  $E$  et  $F$  deux ev de dimension finie tels que  $\dim(E) = \dim(F)$  et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  alors :  
 $f$  est injective  $\iff f$  est surjective  $\iff f$  est bijective  $\iff \text{rg}(f) = \dim(F)$ .

### Exercice 3 *Question de cours*

On lance une infinité de fois une pièce de monnaie non truquée. On note  $A_n$  l'événement « obtenir pile au  $n$ -ième lancer ». Montrer que l'événement  $A$  : « obtenir Pile à chaque lancer » est négligeable.

### Exercice 4 *Question de cours*

On effectue une succession de lancers d'un dé équilibré jusqu'à obtenir le premier 6. On note  $A$  l'événement « on effectue un nombre fini de lancers ». Autrement dit,  $A$  est l'événement « on obtient au moins un 6 ». On souhaite calculer  $P(A)$ . Pour cela, on considère les événements  $A_n$  « on obtient 6 pour la première fois au  $n$ -ième lancer ».

1. Comment écrire  $A$  à l'aide des événements  $A_n$  ?
2. Exprimer  $P(A_n)$  en fonction de  $n$ .
3. Pour tout  $n \geq 1$ , calculer  $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$  en fonction de  $n$ .
4. En déduire  $P(A)$ . Que peut-on dire de l'événement  $A$  ?

### Exercice 5

Soit une application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que :

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), f(1, 1, 0) = (1, 0) \text{ et } f(1, 1, 1) = (1, 1).$$

Exprimer  $f(x, y, z)$  et déterminer une base du noyau et de l'image de  $f$ .

### Exercice 6

Soit l'application :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x + y + z, 2x + y + z, 2x + y + z).$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de  $f$ .

**Exercice 7**

On considère l'endomorphisme

$$f : \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y + z + t \\ x + y - 2z + 2t \\ 2x + y - z + 2t \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de  $f$ .

**Exercice 8**

Soit  $f$  l'application définie de  $\mathbb{R}_2[x]$  dans  $\mathbb{R}^3$  par  $\forall P(x) \in \mathbb{R}_2[x], f(P(x)) = (P(-1), P(0), P(1))$ .  
Montrer que  $f$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_2[x]$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 9**

Soient  $F, G$  les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  suivants :  $F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$  et  $G = \{(b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3, (b, c) \in \mathbb{R}^2\}$ .  
Sont-ils supplémentaires ?

**Exercice 10**

Soit  $n \geq 1$  un entier. Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $u \circ v = 0$ . Montrer que

$$\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u).$$

En déduire que  $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$ .

**Exercice 11**

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ .

Montrer que  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im } f$  sont stables par  $g$ .

On dira qu'un sous-espace  $F$  est stable par  $f$  si :  $\forall x \in F, f(x) \in F$ .

**Exercice 12**

Soit  $E$  un espace vectoriel. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f \circ f = -f$ . Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

**Exercice 13**

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ . On suppose qu'il existe des réels  $a_1, \dots, a_{n-1}$  tels que :

$$f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_2f^2 + a_1f = 0$$

Montrer que si  $a_1 \neq 0$  alors  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

**Exercice 14**

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ .

1. Montrer que  $f \circ g = 0 \iff \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$ .
2. Montrer que  $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0 \iff E = \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ .

## Exercice 15

On dispose d'un dé comportant une face rouge et cinq faces vertes. On réalise une suite illimitée de lancers indépendants les uns des autres. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $R_k$  (resp.  $V_k$ ) l'événement : «on obtient une face rouge (resp. verte) lors du  $k$ -ième lancer». On note  $R$  l'événement : «on obtient au moins une fois la face rouge». On se propose de calculer la probabilité  $P(R)$  par trois méthodes différentes.

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $A_n$  : «on obtient que des faces vertes au cours des  $n$  premiers lancers». Calculer  $P(A_n)$ , exprimer l'événement  $\overline{R}$  à l'aide des événements  $A_n$ , déterminer la nature de la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et en déduire  $P(\overline{R})$  puis  $P(R)$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $B_n$  : «on obtient au moins une fois la face rouge au cours des  $n$  premiers lancers». Calculer  $P(B_n)$ , exprimer l'événement  $R$  à l'aide des événements  $B_n$ , déterminer la nature de la suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et en déduire  $P(R)$ .
3. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $C_n$  : «on obtient la face rouge pour la première fois au  $n$ -ième lancer». Calculer  $P(C_n)$ , exprimer l'événement  $R$  à l'aide des événements  $C_n$ , déterminer la nature de la suite  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et en déduire  $P(R)$ .

## Exercice 16

On jette un dé à six faces une infinité de fois et on note la suite des résultats obtenus. On note pour tout entier naturel  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_i$  l'événement « le résultat du  $i$ -ème lancer est 1 ». On note de plus  $C_n$  l'événement « au moins un des résultats est un 1 lors de  $n$  premiers lancers ».

1. Calculer  $P(C_n)$ .
2. Justifier que  $C_n$  est une suite croissante d'événements.
3. On note  $C$  : « Au moins un des résultats est un 1 ». Exprimer  $C$  en fonction des  $C_n$  et en déduire que  $C$  est presque sûr.
4. On note  $D$  : « Aucun lancer ne donne un 1 ». Montrer que  $D$  est négligeable.
5. (a) Exprimer  $C$  à l'aide des  $A_i$ . La suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est-elle une suite monotone d'événements?  
(b) Appliquer le corollaire du théorème de la limite monotone pour retrouver que  $C$  est négligeable ?

## Exercice 17

Un singe tape une suite infinie de caractères au hasard sur un clavier d'ordinateur qui comporte 50 touches. Montrer qu'il écrira presque-sûrement la phrase : « Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! »