Colles nº 11

Exercice 1 *Question de cours*

1. Monter que $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ est une droite vectorielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Monter que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 *Question de cours*

Démontrer la proposition suivante :

Soient E et F deux ev de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et f une application linéaire de E dans F alors :
f est injective $\Longleftrightarrow$ f est surjective $\Longleftrightarrow$ f est bijective $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Exercice 3 *Question de cours*

On lance une infinité de fois une pièce de monnaie non truquée. On note A_n l'événement « obtenir pile au n-ième lancer ». Montrer que 'événement A : « obtenir Pile à chaque lancer » est négligeable.

Exercice 4 *Question de cours*

On effectue une succession de lancers d'un dé équilibré jusqu'à obtenir le premier 6. On note A l'événement «on effectue un nombre fini de lancers». Autrement dit, A est l'événement «on obtient au moins un 6». On souhaite calculer $P(A)$. Pour cela, on considère les événements A_n «on obtient 6 pour la première fois au n-ième lancer».

1. Comment écrire A à l'aide des événements A_n ?
2. Exprimer $P(A_n)$ en fonction de n.
3. Pour tout $n \geq 1$, calculer $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ en fonction de n.
4. En déduire $P(A)$. Que peut-on dire de l'événement A ?

Exercice 5

Soit une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1),\ f(1,1,0) = (1,0) \text{ et } f(1,1,1) = (1,1).$$

Exprimer $f(x,y,z)$ et déterminer une base du noyau et de l'image de f.

Exercice 6

Soit l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (2x+y+z, 2x+y+z, 2x+y+z). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

Exercice 7

On considère l'endomorphisme
$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y+z+t \\ x+y-2z+2t \\ 2x+y-z+2t \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

Exercice 8

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_2[x]$ dans $\mathbb{R}^3$ par $\forall P(x) \in \mathbb{R}_2[x], \quad f(P(x)) = (P(-1), P(0), P(1))$.
Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9

Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :$F = \left\{(a,a,a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\right\}$ et $G = \left\{(b+c,b,c) \in \mathbb{R}^3, (b,c) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 10

Soit $n \geq 1$ un entier. Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que $u \circ v = 0$. Montrer que
$$\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u).$$
En déduire que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leq n$.

Exercice 11

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont stables par g.
On dira qu'un sous-espace F est stable par f si : $\forall x \in F,\ f(x) \in F$.

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -f$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 13

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On suppose qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que :
$$f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \ldots + a_2 f^2 + a_1 f = 0$$
Montrer que si $a_1 \neq 0$ alors $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 14

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $f \circ g = 0 \iff \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E = 0 \iff E = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 15

On dispose d'un dé comportant une face rouge et cinq faces vertes. On réalise une suite illimitée de lancers indépendants les uns des autres. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note R_k (resp. V_k) l'événement : «on obtient une face rouge (resp. verte) lors du k-ième lancer». On note R l'événement : «on obtient au moins une fois la face rouge». On se propose de calculer la probabilité $P(R)$ par trois méthodes différentes.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n : «on obtient que des faces vertes au cours des n premiers lancers». Calculer $P(A_n)$, exprimer l'événement $\overline{R}$ à l'aide des événements A_n, déterminer la nature de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire $P\left(\overline{R}\right)$ puis $P(R)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit B_n : «on obtient au moins une fois la face rouge au cours des n premiers lancers». Calculer $P(B_n)$, exprimer l'événement R à l'aide des événements B_n, déterminer la nature de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire $P(R)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit C_n : «on obtient la face rouge pour la première fois au n-ième lancer». Calculer $P(C_n)$, exprimer l'événement R à l'aide des événements C_n, déterminer la nature de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire $P(R)$.

Exercice 16

On jette un dé à six faces une infinité de fois et on note la suite des résultats obtenus. On note pour tout entier naturel $i \in \mathbb{N}^*$, A_i l'événement « le résultat du i-ème lancer est 1 ».On note de plus C_n l'événement « au moins un des résultats est un 1 lors de n premiers lancers ».

1. Calculer $P(C_n)$.
2. Justifier que C_n est une suite croissante d'événements.
3. On note C : « Au moins un des résultats est un 1 ». Exprimer C en fonction des C_n et en déduire que C est presque sûr.
4. On note D : « Aucun lancer ne donne un 1 ». Montrer que D est négligeable.
5. (a) Exprimer C à l'aide des A_i. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle une suite monotone d'événements ?
   (b) Appliquer le corollaire du théorème de la limite monotone pour retrouver que C est négligeable ?

Exercice 17

Un singe tape une suite infinie de caractères au hasard sur un clavier d'ordinateur qui comporte 50 touches. Montrer qu'il écrira presque-sûrement la phrase : « Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! »