

Colles n° 10

Exercice 1 *Question de cours*

Démontrer la caractérisation de la négligeabilité par le quotient.

Exercice 2 *Question de cours*

Démontrer la caractérisation des suites équivalentes par le quotient.

Exercice 3 *Question de cours*

Démontrer les propriétés suivantes :

- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, si $u_n = o(w_n)$ alors $\lambda u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ alors $u_n v_n = o(w_n v_n)$.

Exercice 4 *Question de cours*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0. Montrer que :

$$\ln(1 + u_n) \sim u_n \quad \text{et} \quad 1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}.$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \times \frac{(2n-2)!}{2^{n-1} \times (n-1)!} \times \frac{1}{x^{n-\frac{1}{2}}}.$$

Exercice 6

Donner un équivalent simple à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans les exemples suivants et en déduire la limite de la suite.

1. $u_n = \frac{2n^3 - \ln(n+1) + 1}{n^2 + 1}$

4. $u_n = \frac{4^{n+3} + 2^n}{5^{n+2} + 1}$

2. $u_n = \frac{(3n+1)^3}{-5n^3 + 4}$

5. $u_n = \ln \left(\cos \left(\frac{1}{2^n} \right) \right)$

3. $u_n = \sqrt{n^2 + n - 1} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$

6. $u_n = \exp(\sin(2^{-n})) - 1$

Exercice 7

Déterminer un équivalent de la suite u_n de terme général :

1. $u_n = \left(\frac{\cos(\alpha + \frac{\beta}{n})}{\cos(\alpha)} \right)^n$.
2. $u_n = n(\sqrt[n]{5} - 1)$.

Exercice 8

Déterminer la limite de la suite

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

Puis donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ en $+\infty$.

Exercice 9

Montrer que si $P \in \mathbb{R}[x]$ est non nul alors $P(n) \sim an^p$ avec a égal au coefficient dominant de P et $p = \deg(P)$.

Exercice 10

Calculer la limite de la suite définie pour les entiers $n \geq 3$ par

$$u_n = \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{3n}.$$

Exercice 11

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\ln \left(\frac{2}{u_n} \right) \sim \frac{1}{n^2}$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ (à déterminer) et donner un équivalent de $(u_n - \ell)$.

Exercice 12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que (u_n) converge vers 0^+ .
2. Donner un équivalent simple de (u_n) .

Exercice 13

Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$$

1. (a) Montrer que pour tout $k \geq 2$:

$$\int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt$$

- (b) En déduire un encadrement de $\ln(n!)$, puis de u_n pour $n \geq 2$.
2. Qu'en déduire pour les suites $(\ln(n!))_{n \geq 2}$ et $(\ln(n^n))_{n \geq 2}$?

Exercice 14

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

$$1. \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \quad 2. \sum_{k \geq 0} k(k-1) \frac{1}{4^k} \quad 3. \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!} \quad 4. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!}$$

Exercice 15

Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

$$1. u_n = \frac{\ln n}{n^2} \quad 3. u_n = \ln \left(\frac{2 + \sin(\frac{1}{n})}{2 - \sin(\frac{1}{n})} \right) \quad 5. u_n = \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n\sqrt{n}} \quad 7. u_n = \frac{n + e^{-2n}}{n^4 + n^2 + 1}$$

$$2. u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \quad 4. u_n = \frac{1}{n^2 + \sin(n^6)} \quad 6. u_n = \frac{(-1)^n \cos(n)}{n^2 \sqrt{n}} \quad 8. u_n = (-1)^n n e^{-n}$$

Exercice 16

En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes :

$$1. \sum_{n \geq 2} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\ln(n) \ln(n+1)}$$

$$2. \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$3. \sum_{n \geq 0} \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$$

Indication : Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan \left(\frac{a-b}{1+ab} \right)$.

Exercice 17

Critère de Cauchy Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

1. Démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (\ell - \varepsilon)^n \leq u_n \leq (\ell + \varepsilon)^n.$$

2. On suppose que $\ell < 1$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

3. On suppose que $\ell > 1$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente.

4. En déduire la nature de la série dans le cas où

$$u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n.$$

Exercice 18

On considère deux séries de termes généraux u_n et v_n qui sont strictement positifs et telles que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

1. Que peut-on dire si la série de terme général u_n converge ?

2. Quelle est la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (3n-2)}{3^n \times n!}$$

Exercice 19

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels qui tend vers 0. Montrer que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

Indication : On pourra introduire les suites suivantes : $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ où S_n désigne la somme partielle de la série de terme général $(-1)^n u_n$.