Feuille de colles n° 1

Exercice 1 *Question de cours*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$.
2. Montrer le résultat par récurrence.

Exercice 2 *Question de cours*

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$, donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} q^k$.
2. Montrer le résultat par récurrence.

Exercice 3 *Question de cours*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^2$.
2. Montrer le résultat par récurrence.

Exercice 4

Écrire sous forme de fraction irréductible :

1. $N = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{9}\right) \div \left(\frac{1}{2}\right)^2$
2. $O = \frac{1}{4} \div \left(\left(\frac{7}{8}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)$
3. $P = \left(-\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) \div \left(\frac{5}{6}\right)^2$

Exercice 5

Simplifier les nombres suivants :

1. $\sqrt{28} + \sqrt{\frac{1}{24}}$
2. $\sqrt{54} + \sqrt{\frac{3a^2}{32}}$
3. $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$

Exercice 6

Simplifier les nombres suivants :

1. $E = 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9}$
2. $F = \frac{4^{-2} \times 8^3}{16^3}$
3. $G = \frac{9^3 \times 27^2 \times 75}{5^3 \times 3^4}$

Exercice 7

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-2} < 3$
2. $\dfrac{3}{5x-1} + \dfrac{10}{10x-2} > \dfrac{1}{x}$
3. $3\sqrt{x+3} - 6 = x - 2$
4. $\sqrt{2+x} \leq -1$
5. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq 4$

Exercice 8

Résoudre l'inéquation de paramètre réel m :

$$(m^2 - 1)x < m + 1.$$

Exercice 9

Déterminer les suites bornées vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3. \end{cases}$. Soit $b \in \mathbb{R}$, on pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + b \times n - 1.$

1. Déterminer b pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.
2. Exprimer v_n en fonction de n. Puis, exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 11

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 3, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 4v_n, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_n + 3v_n. \end{cases}$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n + 2v_n,$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n = u_n - 2v_n.$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
2. Quelle est la nature de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Exprimer t_n en fonction de n.
4. Exprimer u_n en fonction de n.
5. Exprimer v_n en fonction de n.

Exercice 12

Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Exercice 13

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2 - 2. \end{cases}$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^{2^n} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2^n}.$$

Exercice 15

Déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n + 3.$$

Indication : On pourra utiliser une suite auxiliaire du type $(u_n - n\alpha)_n$ où α est une constante à déterminer.