Progression en mathématiques Semestre 3, L2, 2h/semaine sur 14 semaines

Table des matières

1 Chapitre 1 : Statistiques univariées et bivariées

Durée : 4 heures

Statistiques univariées

- Série statistique associée à un échantillon.
- Effectifs, fréquences, fréquences cumulées, diagrammes en bâton, histogrammes.
- Indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles.
- Indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile.
- Analyse d'un caractère quantitatif : caractéristiques de position (moyenne, médiane) ; mode(s) ; caractéristiques de dispersion (variance et écart-type empiriques, quartiles, déciles).

Statistiques bivariées

- Série statistique à deux variables, nuage de points associé
- Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage
- Covariance empirique, coefficient de corrélation empirique, droites de régression (méthode des moindres carrés)

2 Chapitre 2 : Probabilités élémentaires

Durée : 6 heures

Observation d'une expérience aléatoire - Événements

- Expérience aléatoire.
  $\hookrightarrow$ *On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples.*
- Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles, événements contraires. Système complet d'événements finis.
  $\hookrightarrow$ *On se limitera aux systèmes complets d'événements de type A_1, ..., A_n ($n = 2$ ou $n = 3$) où les A_i sont des parties deux à deux disjointes et de réunion égale à Ω.*

Probabilité

- Une probabilité est une application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et pour tous A et B incompatibles de $P(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
  $\hookrightarrow$ *Cas de l'équiprobabilité.*
- Formule de Poincaré (ou du crible) pour deux événements.

Probabilité conditionnelle *Toutes les formules de cette section seront illustrées par des arbres pondérés.*

- Probabilité conditionnelle.
  $\hookrightarrow$ *Notation P_A.*
- Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.
- Formule des probabilités composées.
  $\hookrightarrow$ *Si $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq 0$ alors $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$.*
- Formule des probabilités totales.
  $\hookrightarrow$ *Si $A_1, ..., A_n$ ($n = 2$ ou 3) est un système complet, alors pour tout événement B on a : $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$.*
- Formule de Bayes.

Indépendance en probabilité

- Indépendance de deux événements.
  $\hookrightarrow$ *$P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.*
- Indépendance mutuelle de n événements.
- Si n événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

3 Chapitre 3 : Variables aléatoires discrètes

Durée : 8 heures

- Une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
  $\hookrightarrow$ *On adoptera les notations habituelles telles que $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc*
- Système complet associé à une variable aléatoire.
- Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

- Espérance d'une variable aléatoire finie.
  $\hookrightarrow$ $E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$.
- Linéarité de l'espérance.
  $\hookrightarrow$ $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- Variable aléatoire $Y = g(X)$ lorsque g est une fonction à valeurs réelles.
- Théorème de transfert.
  $\hookrightarrow$ $E(g(X)) = \sum_i g(x_i)P(X = x_i)$. *Théorème admis*
- Variance d'une variable aléatoire. Écart-type.
  $\hookrightarrow$ *Notation* $V(X)$, $\sigma(X)$.
- $V(aX + b) = a^2V(X)$.
- Formule de König-Huygens.
  $\hookrightarrow$ $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Coefficients binomiaux

- Factorielle, notation $n!$.
- Parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.
  $\hookrightarrow$ *On pourra faire le lien entre les parties à k éléments d'un ensemble à n éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant k succès pour n répétitions.*
- Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{k}$
- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
  $\hookrightarrow$ *En pratiques, les étudiants utiliseront la calculatrice pour le calculer.*

Lois usuelles finies

- Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Espérance et variance.
  $\hookrightarrow$ *Notation :* $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
- Loi de Bernoulli. Espérance et variance.
  $\hookrightarrow$ *Notation :* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
- Loi binomiale. Espérance et variance.
  $\hookrightarrow$ *Notation :* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Lois usuelles discrètes infinies

- Loi géométrique
  $\hookrightarrow$ *Notation :* $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- Loi de Poisson
  $\hookrightarrow$ *Notation :* $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

4 Chapitre 4 : Intégrales généralisées

Durée : 6 heures

Les notions introduites dans ce chapitre le sont exclusivement pour leurs applications au calcul des probabilités. Aucune difficulté ne sera soulevée. Le calcul des intégrales généralisées est effectué par des recherches de primitives sur des intervalles du type $[a, b]$, l'application de la relation de Chasles, et des passages à la limite en $-\infty$ et/ou $+\infty$.

- Intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Convergence et définition.
- Intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $]-\infty, b]$.
- Extension aux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

5 Evaluations du S3 : deux devoirs de 2h

Jeudi 17 octobre de 10h30 à 12h 30 et jeudi 19 décembre de 10h30 à 12h30 en classe entière

