

Progression en mathématiques, L2, 2h/semaine sur 28 semaines (S3+S4)

Table des matières

1	Chapitre 1 : Fonctions de deux variables	2
2	Chapitre 2 : Optimisation des fonctions de deux variables	2
3	Chapitre 3 : Probabilités élémentaires	2
4	Chapitre 4 : Variables aléatoires discrètes	2
5	Evaluations du S3 : deux devoirs de 2h	3
6	Chapitre 5 : Intégrales généralisées	4
7	Chapitre 6 : Variables aléatoires à densité	4
8	Chapitre 7 : Équations différentielles	4
9	Evaluations du S4 : deux devoirs de 2h	4

1 Chapitre 1 : Fonctions de deux variables

Durée : 10 heures

- Dérivées partielles premières et secondes
- Différentielle d'une fonction de deux variables
- Fonction deux fois différentiables

2 Chapitre 2 : Optimisation des fonctions de deux variables

Durée : 9 heures

- Condition nécessaire d'ordre 1

Optimisation libre

- Caractérisation avec le signe du déterminant de la hessienne ($rt - s^2$)

Optimisation sous contrainte d'égalité

- Méthode par substitution (on se ramène aux fonctions d'une variable)
- Méthode de Lagrange

3 Chapitre 3 : Probabilités élémentaires

Durée : 6 heures

Observation d'une expérience aléatoire - Événements

- Expérience aléatoire.
 $\hookrightarrow$ On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples.
- Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles, événements contraires. Système complet d'événements finis.
 $\hookrightarrow$ On se limitera aux systèmes complets d'événements de type $A_1, \dots, A_n$ ($n = 2$ ou $n = 3$) où les A_i sont des parties deux à deux disjointes et de réunion égale à Ω .

Probabilité

- Une probabilité est une application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et pour tous A et B incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
 $\hookrightarrow$ Cas de l'équiprobabilité.
- Formule de Poincaré (ou du crible) pour deux événements.

Probabilité conditionnelle Toutes les formules de cette section seront illustrées par des arbres pondérés.

- Probabilité conditionnelle.
 $\hookrightarrow$ Notation P_A .
- Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.
- Formule des probabilités composées.
 $\hookrightarrow$ Si $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq 0$ alors $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$.
- Formule des probabilités totales.
 $\hookrightarrow$ Si $A_1, \dots, A_n$ ($n = 2$ ou 3) est un système complet, alors pour tout événement B on a :
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i).$$
- Formule de Bayes.

Indépendance en probabilité

- Indépendance de deux événements.
 $\hookrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
- Indépendance mutuelle de n événements.
- Si n événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i , avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

4 Chapitre 4 : Variables aléatoires discrètes

Durée : 8 heures

- Une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
 $\hookrightarrow$ On adoptera les notations habituelles telles que $[X = x]$, $[X \leq x]$, etc

- Système complet associé à une variable aléatoire.
- Loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Espérance d'une variable aléatoire finie.
 $\hookrightarrow E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$.
- Linéarité de l'espérance.
 $\hookrightarrow E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- Variable aléatoire $Y = g(X)$ lorsque g est une fonction à valeurs réelles.
- Théorème de transfert.
 $\hookrightarrow E(g(X)) = \sum_i g(x_i) P(X = x_i)$. *Théorème admis*
- Variance d'une variable aléatoire. Écart-type.
 $\hookrightarrow$ Notation $V(X), \sigma(X)$.
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- Formule de König-Huygens.
 $\hookrightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Coefficients binomiaux

- Factorielle, notation $n!$.
- Parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.
 $\hookrightarrow$ On pourra faire le lien entre les parties à k éléments d'un ensemble à n éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant k succès pour n répétitions.
- Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{k}$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
 $\hookrightarrow$ En pratiques, les étudiants utiliseront la calculatrice pour le calculer.

Lois usuelles finies

- Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Espérance et variance.
 $\hookrightarrow$ Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
- Loi de Bernoulli. Espérance et variance.
 $\hookrightarrow$ Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
- Loi binomiale. Espérance et variance.
 $\hookrightarrow$ Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Lois usuelles discrètes infinies

- Loi géométrique
 $\hookrightarrow$ Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- Loi de Poisson
 $\hookrightarrow$ Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

5 Evaluations du S3 : deux devoirs de 2h

Evaluation 1 juste après les vacances de la Toussaint. Evaluation 2 à la toute fin du semestre.

Fin du semestre 3.

6 Chapitre 5 : Intégrales généralisées

Durée : 6 heures

Les notions introduites dans ce chapitre le sont exclusivement pour leurs applications au calcul des probabilités. Aucune difficulté ne sera soulevée. Le calcul des intégrales généralisées est effectué par des recherches de primitives sur des intervalles du type $[a, b]$, l'application de la relation de Chasles, et des passages à la limite en $-\infty$ et/ou $+\infty$.

- Intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ où f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Convergence et définition.
- Intégrale $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ où f est une fonction continue sur $] -\infty, b]$.
- Extension aux intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

7 Chapitre 6 : Variables aléatoires à densité

Durée : 8 heures

- Densité de probabilité
- Variable aléatoire à densité
- Fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité
- Espérance, variance, écart-type

Variables aléatoires à densité usuelles

- Loi uniforme. Densité et fonction de répartition. Espérance et variance.
 $\hookrightarrow$ Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.
- Loi exponentielle. Densité et fonction de répartition. Espérance et variance.
 $\hookrightarrow$ Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
- Loi normale (ou de Laplace-Gauss) de paramètres m et σ^2 , où $\sigma > 0$. Espérance et variance.
 $\hookrightarrow$ Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
- Loi normale centrée réduite. Densité
 $\hookrightarrow$ Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

A noter : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si $X^* = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ On attend des étudiants qu'ils sachent utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. Pour tout réel x : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

8 Chapitre 7 : Équations différentielles

Durée : 10 heures

- Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 : à coefficients constants + cas général
- Équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre : méthode de variation de la constante
- Problème de Cauchy. Unicité de la solution.
- Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 : à coefficients constants. Problème de Cauchy. Unicité de la solution.
- Équations différentielles linéaires d'ordre 2 avec second membre. Recherche de la solution particulière guidée.
- En TD, exemple d'équations différentielles à variables séparables.

9 Evaluations du S4 : deux devoirs de 2h