

Révisions calculs de dérivées

1 Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (sans donner de justification concernant l'existence de cette dérivée).

1. $a(x) = 8x^3 + 4x^2 - 12x + 5$

$$a'(x) = 24x^2 + 8x - 12.$$

2. $b(x) = (2x^2 + x - 2)(3x + 2)$

On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$:

$$\begin{aligned} b'(x) &= (4x + 1)(3x + 2) + 3(2x^2 + x - 2) \\ &= 12x^2 + 11x + 2 + 6x^2 + 3x - 6 \\ &= 18x^2 + 14x - 4. \end{aligned}$$

3. $c(x) = \frac{1}{3x - 2}$

On écrit

$$c(x) = (3x - 2)^{-1}.$$

Ainsi,

$$c'(x) = -1 \times 3(3x - 2)^{-2} = -\frac{3}{(3x - 2)^2}.$$

4. $d(x) = \sqrt{3x^2 - x - 1}$

d est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 3x^2 - x - 1$.

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - x - 1)^{-1/2}(6x - 1) \\ &= \frac{6x - 1}{2\sqrt{3x^2 - x - 1}}. \end{aligned}$$

5. $e(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{3x + 2}$

On utilise la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e'(x) &= \frac{(4x + 1)(3x + 2) - 3(2x^2 + x - 2)}{(3x + 2)^2} \\ &= \frac{12x^2 + 11x + 2 - 6x^2 - 3x + 6}{(3x + 2)^2} \\ &= \frac{6x^2 + 8x + 8}{(3x + 2)^2}. \end{aligned}$$

6. $f(x) = (x^2 + 1) \times \frac{1}{x}$

On utilise la formule du produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \times \frac{1}{x} + (x^2 + 1) \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2 - \frac{x^2 + 1}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1}{x^2}. \end{aligned}$$

7. $g(x) = x\sqrt{x} + x$

$x\sqrt{x}$ est de la forme $u \times v$. Donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \\ &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} + 1 \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} + 1 \end{aligned}$$

8. $h(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$

On utilise la formule de dérivation d'une composée :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2(\sqrt{x} + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

On peut également écrire

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

9. $i(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

On pose

$$u(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Alors

$$u'(x) = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} i'(x) &= 2 \left(\frac{x+1}{x-1}\right) \left(-\frac{2}{(x-1)^2}\right) \\ &= -\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

10. $j(x) = (2x^2 - 4x + 3)^7$

On utilise la formule de dérivation u^n avec $n = 7$:

$$\begin{aligned} j'(x) &= 7(2x^2 - 4x + 3)^6(4x - 4) \\ &= 28(x-1)(2x^2 - 4x + 3)^6. \end{aligned}$$

11. $k(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{2x + 1}$

On utilise la formule du quotient :

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{(6x^2 - 6x - 2)(2x + 1) - 2(2x^3 - 3x^2 - 2x - 1)}{(2x + 1)^2} \\ &= \frac{12x^3 - 6x^2 - 10x - 2 - 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2}{(2x + 1)^2} \\ &= \frac{8x^3 - 6x}{(2x + 1)^2}. \end{aligned}$$

2 Exercice 2

Calculer la dérivée $f'(x)$ des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x - 2 - 2\ln(x)$

$$\boxed{f'(x) = 1 - \frac{2}{x}}.$$

2. $f(x) = x \ln(x)$

On utilise la formule du produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = \ln(x) + 1}.$$

3. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

On utilise la formule du quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}}.$$

4. $f(x) = x^2 + 1 + 2 \ln(x)$

$$\boxed{f'(x) = 2x + \frac{2}{x}}.$$

5. $f(x) = x^2 \ln(x)$

On utilise la formule du produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \ln(x) + x^2 \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln(x) + x. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = 2x \ln(x) + x}.$$

6. $f(x) = \frac{x + 3 \ln(x)}{x}$

On peut d'abord simplifier :

$$f(x) = 1 + \frac{3 \ln(x)}{x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)' \\ &= 3 \frac{1 - \ln(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{3(1 - \ln(x))}{x^2}}.$$

7. $f(x) = \ln(x - 4)$

On utilise la dérivée de $\ln(u)$:

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x - 4}}.$$

8. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

9. $f(x) = \frac{10}{\ln(4x - 2)}$

On écrit

$$f(x) = 10(\ln(4x - 2))^{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= -10(\ln(4x - 2))^{-2} \times \frac{4}{4x - 2} \\ &= -\frac{40}{(4x - 2)(\ln(4x - 2))^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x) = -\frac{40}{(4x - 2)(\ln(4x - 2))^2}.$$

3 Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2} - (e^x)^2$

On remarque que

$$(e^x)^2 = e^{2x}.$$

Ainsi,

$$f(x) = e^{x^2} - e^{2x}.$$

Donc

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2e^{2x}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2e^{2x}.$$

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{1-x}}$

On peut simplifier l'expression :

$$f(x) = e^{x^2 - (1-x)} = e^{x^2 + x - 1}.$$

Par conséquent,

$$f'(x) = (2x + 1)e^{x^2 + x - 1}.$$

Donc

$$f'(x) = (2x + 1)e^{x^2 + x - 1}.$$

3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2} \times e^{x^2 - 2x + 1}$

On utilise

$$e^a e^b = e^{a+b}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{-x^2+x^2-2x+1} \\ &= e^{-2x+1}.\end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) = -2e^{-2x+1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{f'(x) = -2e^{-2x+1}}.$$