# Evaluation n° 4

*Durée : 2h*

Les documents sont interdits. Les calculatrices en mode examen sont autorisées.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de deux pages est composé de dix exercices et d'un exercice bonus.

## Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) + 4y(t) = 0$
2. $y'(t) - 4t^3y(t) = 0$
3. $(1+t^2)y'(t) + 2ty(t) = 0$

## Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'(t) = -5y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

## Exercice 3

Le but de l'exercice est de résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) + y(t) = 3\mathrm{e}^{5t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

*La résolution est détaillée en questions pour vous guider.*

1. Résoudre l'équation homogène associée à ce problème.
2. Déterminer une solution particulière à l'aide de la méthode de la variation de la constante.
3. En déduire la forme des solutions générales de l'équation différentielle.
4. Conclure en finissant de résoudre le problème de Cauchy.

## Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 0$
2. $y"(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$

## Exercice 5

Le but de cet exercice est de résoudre le problème de Cauchy suivant $\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = \mathrm{e}^{-5t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

*La résolution est détaillée en questions pour vous guider.*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$y'' - 2y' - 8y = 0.$$
2. On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$y'' - 2y' - 8y = \mathrm{e}^{-5t} \quad \text{(E)}$$
   (a) Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{-5t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) Conclure.
3. Résoudre le problème de Cauchy.

## Exercice 6

Résoudre les deux systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -6x + 9y = 7 \end{cases}$

## Exercice 7

Résoudre le système triangulaire suivant : $(S) \quad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2y - 3z = 1 \\ 2z = 10 \end{cases}$

## Exercice 8

Résoudre le système suivant : $(S) \quad \begin{cases} 2x - y + 2z = 5 \\ x + y - z = -1 \\ -x - y + 3z = 3 \end{cases}$

## Exercice 9

Parmi les espaces suivants, déterminer ceux qui sont des espaces vectoriels :

1. $F_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x_1 - x_2 = 1 \right\}$
2. $F_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 2x_1 - 3x_2 = 0 \right\}$

## Exercice 10

On considère le sous-espace suivant :

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de $F$.
3. En déduire une base de $F$.

## Exercice 11 *BONUS*

On considère l'ensemble suivant : $G = \left\{ (a + 2b, a - b, a + 5b) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $G$.

# Corrigé : Evaluation n° 4

## Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) + 4y(t) = 0$

> Les solutions de cette équation sont de la forme $y(t) = C\mathrm{e}^{-4t}$ avec $C$ une constante réelle.

2. $y'(t) - 4t^3y(t) = 0$

> Les solutions de cette équation sont de la forme $y(t) = C\mathrm{e}^{t^4}$ avec $C$ une constante réelle.

3. $(1 + t^2)y'(t) + 2ty(t) = 0$

> On commence par transformer l'équation pour se ramener à une forme du cours en la divisant par $1 + t^2$ (qui est bien différent de 0 pour tout $t \in \mathbb{R}$). On a alors l'équation :
>
> $$y'(t) + \frac{2t}{1+t^2}y(t) = 0.$$
>
> Une primitive de $t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^2}$ est donnée par $t \mapsto \ln(1 + t^2)$. Les solutions de cette équation sont donc de la forme $y(t) = C\mathrm{e}^{-\ln(1+t^2)} = \dfrac{C}{\mathrm{e}^{\ln(1+t^2)}} = \dfrac{C}{1+t^2}$ avec $C$ une constante réelle.

## Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'(t) = -5y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

> On commence par résoudre l'équation sans la condition de Cauchy, elle s'écrit : $y'(t) + 5y(t) = 0$. Les solutions de cette équation sont de la forme $y(t) = C\mathrm{e}^{-5t}$ avec $C$ une constante réelle.
> On utilise ensuite la condition de Cauchy pour déterminer la constante $C$.
> On sait que $y(0) = 1$ donc $y(0) = C\mathrm{e}^{-5\times 0} = C = 1$. Ainsi l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-5t}$.

## Exercice 3

Le but de l'exercice est de résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) + y(t) = 3\mathrm{e}^{5t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

*La résolution est détaillée en questions pour vous guider.*

1. Résoudre l'équation homogène associée à ce problème.

> L'équation homogène associée est l'équation : $y'(t) + y(t) = 0$. Les solutions de cette équation sont de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{-t}$ avec $C$ une constante réelle.

2. Déterminer une solution particulière à l'aide de la méthode de la variation de la constante.

> Déterminons une solution particulière de l'équation $(E)$ : $y'(t) + y(t) = 3\mathrm{e}^{5t}$. Pour cela, on utilise la méthode de variations de la constante. On recherche une solution sous la forme $y_{SP}(t) = C(t)\mathrm{e}^{-t}$.
>
> On a alors $y'_{SP}(t) = C'(t)\mathrm{e}^{-t} - C(t)\mathrm{e}^{-t}$. Injectons ensuite cela dans l'équation différentielle $(E)$. On a :
>
> $$\begin{aligned}(E) &\iff y'_{SP}(t) + y_{SP}(t) = 3\mathrm{e}^{5t}\\ &\iff C'(t)\mathrm{e}^{-t} - C(t)\mathrm{e}^{-t} + C(t)\mathrm{e}^{-t} = 3\mathrm{e}^{5t}\\ &\iff C'(t)\mathrm{e}^{-t} = 3\mathrm{e}^{5t}\\ &\iff C'(t) = 3\mathrm{e}^{6t}\\ &\iff C(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{6t}\end{aligned}$$
>
> Une solution particulière de $(E)$ vaut donc $y_{SP}(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{6t} \times \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{5t}$

3. En déduire la forme des solutions générales de l'équation différentielle.

> Les solutions générales de l'équation différentielle $(E)$ sont de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{5t}$ avec $C$ une constante réelle.

4. Conclure en finissant de résoudre le problème de Cauchy.

> On cherche maintenant la valeur de la constante $C$ pour que la solution vérifie $y(0) = 2$. On a :
>
> $$y(0) = C + \frac{1}{2} = 2 \quad \text{donc} \quad C = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$
>
> Ainsi l'unique solution de ce problème de Cauchy s'écrit :
>
> $$y : t \mapsto \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{5t}.$$

## Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 0$

> On commence par résoudre l'équation caractéristique associée : $r^2 - 4r + 3 = 0$. On calcule son discriminant : $\Delta = 4$ et donc $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$.
> Les solutions de cette équation différentielle sont donc de la forme :
>
> $$y : t \mapsto \lambda\mathrm{e}^{t} + \mu\mathrm{e}^{3t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \text{ des constantes.}$$

2. $y"(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$

> On commence par résoudre l'équation caractéristique associée : $r^2 + 6r + 9 = 0$. On calcule son discriminant : $\Delta = 0$ et donc $r_0 = -3$.
> Les solutions de cette équation différentielle sont donc de la forme :
>
> $$y : t \mapsto (\lambda + t\mu)\mathrm{e}^{-3t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \text{ des constantes.}$$

## Exercice 5

Le but de cet exercice est de résoudre le problème de Cauchy suivant $\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = \mathrm{e}^{-5t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

*La résolution est détaillée en questions pour vous guider.*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$y'' - 2y' - 8y = 0.$$

> On commence par résoudre l'équation caractéristique associée : $r^2 - 2r - 8 = 0$. On calcule son discriminant : $\Delta = 36$ et donc $r_1 = -2$ et $r_2 = 4$.
> Les solutions de cette équation différentielle sont donc de la forme :
> $$y : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-2t} + \mu \mathrm{e}^{4t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \text{ des constantes.}$$

2. On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$y'' - 2y' - 8y = \mathrm{e}^{-5t} \quad \text{(E)}$$

(a) Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{-5t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

> On pose $y_{SP}(t) = \alpha \mathrm{e}^{-5t}$, on a : $y'_{SP}(t) = -5\alpha \mathrm{e}^{-5t}$ et $y''_{SP}(t) = 25\alpha \mathrm{e}^{-5t}$. Injectons cela dans l'équation différentielle (E), on a :
> $$\begin{aligned} (E) &\iff y''_{SP} - 2y'_{SP} - 8y_{SP} = \mathrm{e}^{-5t} \\ &\iff 25\alpha \mathrm{e}^{-5t} + 10\alpha \mathrm{e}^{-5t} - 8\alpha \mathrm{e}^{-5t} = \mathrm{e}^{-5t} \\ &\iff 27\alpha \mathrm{e}^{-5t} = \mathrm{e}^{-5t} \\ &\iff 27\alpha = 1 \\ &\iff \alpha = \frac{1}{27} \end{aligned}$$
> Ainsi une solution particulière de (E) vaut $y_{SP}(t) = \frac{1}{27}\mathrm{e}^{-5t}$.

(b) Conclure.

> Les solutions générales de (E) sont donc de la forme :
> $$y : t \mapsto \frac{1}{27}\mathrm{e}^{-5t} + \lambda \mathrm{e}^{-2t} + \mu \mathrm{e}^{4t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \text{ des constantes.}$$

3. Résoudre le problème de Cauchy.

> Il reste à utiliser les deux conditions de Cauchy pour déterminer les constantes $\lambda$ et $\mu$. On a, d'une part :
> $$y(0) = 0 \text{ donc } \frac{1}{27} + \lambda + \mu = 0 \text{ donc } \lambda + \mu = -\frac{1}{27}.$$
> D'autre part, $y'(t) = \frac{-5}{27}\mathrm{e}^{-5t} - 2\lambda \mathrm{e}^{-2t} + 4\mu \mathrm{e}^{4t}$ ainsi on a :
> $$y'(0) = 1 \text{ donc } \frac{-5}{27} - 2\lambda + 4\mu = 1 \text{ donc } -2\lambda + 4\mu = 1 + \frac{5}{27} = \frac{32}{27}$$
> On a donc un système à résoudre pour déterminer $\lambda$ et $\mu$ :
> $$\begin{cases} \lambda + \mu = -\frac{1}{27} \\ -2\lambda + 4\mu = \frac{32}{27} \end{cases}$$
> On le résout (par substitution par exemple) et on obtient $\lambda = -\frac{2}{9}$ et $\mu = \frac{5}{27}$.

L'unique solution du problème de Cauchy vaut donc :

$$y : t \mapsto \frac{1}{27}\mathrm{e}^{-5t} - \frac{2}{9}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{5}{27}\mathrm{e}^{4t}$$

## Exercice 6

Résoudre les deux systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -5 \\ 2x & + & 5y & = & 12 \end{array}\right.$

On échelonne le système en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, on obtient le système : $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -5 \\ & & 11y & = & 22 \end{array}\right.$
Le système est alors triangulaire et on le résout facilement, on obtient : $y = 2$ et $x = -5 + 3 \times 2 = 1$. Ainsi $\mathcal{S} = \{(1, 2)\}$.

2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 1 \\ -6x & + & 9y & = & 7 \end{array}\right.$

On échelonne le système en faisant $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$, on obtient le système : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 1 \\ & & 0 & = & 10 \end{array}\right.$ La dernière ligne est impossible donc le système n'a pas de solution, $\mathcal{S} = \emptyset$.

## Exercice 7

Résoudre le système triangulaire suivant : $(S) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ & & 2y & - & 3z & = & 1 \\ & & & & 2z & = & 10 \end{array}\right.$

Le système est déjà triangulaire donc on le résout facilement. On obtient : $z = 5$, $y = \dfrac{1 + 3 \times 5}{2} = 8$ et $x = 1 + 8 - 2 \times 5 = -1$. Ainsi $\mathcal{S} = \{(-1, 8, 5)\}$.

## Exercice 8

Résoudre le système suivant : $(S) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & y & - & z & = & -1 \\ -x & - & y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ -x & - & y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -1 \\ & - & 3y & + & 4z & = & 7 \\ & & & & 2z & = & 2 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

On a mis le système sous forme échelonné et on peut maintenant facilement le résoudre.

$$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -1 + z \\ & & y & = & -1 \\ & & z & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{(1; -1; 1)\}$.

## Exercice 9

Parmi les espaces suivants, déterminer ceux qui sont des espaces vectoriels :

1. $F_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x_1 - x_2 = 1 \}$

> $(0,0) \notin F_1$ donc $F_1$ n'est pas un espace vectoriel.

2. $F_2 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 2x_1 - 3x_2 = 0 \}$

> Montrons que $F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
> - On a clairement $F_2 \subset \mathbb{R}^2$.
> - $F_2 \neq \emptyset$ car $2 \times 0 - 3 \times 0 = 0$ donc $(0,0) \in F_2$.
> - Soit $X = (x_1, x_2) \in F_2$, $Y = (y_1, y_2) \in F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda X + Y \in F_2$. On a, d'abord :
>
> $$\lambda X + Y = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2).$$
>
> On a, ensuite :
>
> $$2(\lambda x_1 + y_1) - 3(\lambda x_2 + y_2) = \lambda(2x_1 - 3x_2) + 2y_1 - 3y_2 = \lambda \times 0 + 0 = 0.$$
>
> Ainsi $\lambda X + Y \in F_2$.

## Exercice 10

On considère le sous-espace suivant :

$$F = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$$

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

> Montrons que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
> - On a clairement $F \subset \mathbb{R}^3$.
> - $F \neq \emptyset$ car $3 \times 0 - 0 + 0 = 0$ donc $(0,0,0) \in F$.
> - Soit $X = (x_1, x_2, x_3) \in F$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda X + Y \in F$. On a, d'abord :
>
> $$\lambda X + Y = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \lambda x_3 + y_3).$$
>
> On a, ensuite :
>
> $$3(\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) + \lambda x_3 + y_3 = \lambda(3x_1 - x_2 + x_3) + 3y_1 - y_2 + y_3 = \lambda \times 0 + 0 = 0.$$
>
> Ainsi $\lambda X + Y \in F$.

2. Déterminer une famille génératrice de $F$.

> $$F = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 3x_1 + x_3 = x_2 \} = \{ (x_1, 3x_1 + x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R} \}$$
> $$F = \{ (x_1, 3x_1, 0) + (0, x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R} \} = \{ x_1(1,3,0) + x_3(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R} \}$$
>
> La famille $((1,3,0),(0,1,1))$ est une famille génératrice de $F$.

3. En déduire une base de $F$.

> La famille $((1,3,0),(0,1,1))$ est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. De plus, c'est une une famille génératrice de $F$, c'est donc une base de $F$.

## Exercice 11 *BONUS*

On considère l'ensemble suivant : $G = \left\{(a+2b, a-b, a+5b) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\right\}$.

1. Montrer que $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

> Montrons que $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
> - On a clairement $G \subset \mathbb{R}^3$.
> - $G \neq \emptyset$ car $(0,0,0) \in G$ pour $a = b = 0$.
> - Soit $X = (a+2b, a-b, a+5b) \in G$, $Y = (a'+2b', a'-b', a'+5b') \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda X + Y \in G$.
>   On a, :
>
> $$\begin{aligned} \lambda X + Y &= (\lambda(a+2b) + a' + 2b', \lambda(a-b) + a' - b', \lambda(a+5b) + (a'+5b')) \\ &= (\lambda a + a' + 2(\lambda b + b'), \lambda a + a' - (\lambda b + b'), \lambda a + a' + 5(\lambda b + b')). \end{aligned}$$
>
>   Sous cette forme, on peut affirmer que $\lambda X + Y \in G$.

2. Déterminer une base de $G$.

> On a :
>
> $$G = \left\{(a,a,a) + (2b, -b, 5b) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a(1,1,1) + b(2,-1,5) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\right\}.$$
>
> La famille $((1,1,1),(2,-1,5))$ est une famille génératrice de $G$. Elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. De plus, c'est une une famille génératrice de $G$, c'est donc une base de $G$.